



TESIS - SM 142501

**KENDALI OPTIMAL PADA MODEL  
EKSTRAKSI LIPID MIKROALGA  
MENGUNAKAN METODE LQR (LINEAR  
QUADRATIC REGULATOR) DAN METODE  
PMP (PONTRYAGIN MAXIMUM PRINCIPLE)**

NUR ILMAYASINTA  
NRP 0611 1650 012 003

DOSEN PEMBIMBING:  
Dr. Dra. Mardlijah, M.T.

PROGRAM MAGISTER  
DEPARTEMEN MATEMATIKA  
FAKULTAS MATEMATIKA, KOMPUTASI DAN SAINS DATA  
INSTITUT TEKNOLOGI SEPULUH NOPEMBER  
SURABAYA  
2018





THESIS - SM 142501

**OPTIMAL CONTROL OF LIPID EXTRACTION  
MODEL ON MICROALGAE USING LQR  
(LINEAR QUADRATIC REGULATOR) AND  
PMP (PONTRYAGIN MAXIMUM PRINCIPLE)  
METHODS**

NUR ILMAYASINTA  
NRP 0611 1650 012 003

SUPERVISOR:  
Dr. Dra. Mardlijah, M.T.

MASTER PROGRAM  
DEPARTMENT OF MATHEMATICS  
FACULTY OF MATHEMATICS, COMPUTING AND DATA SCIENCE  
SEPULUH NOPEMBER INSTITUTE OF TECHNOLOGY  
SURABAYA  
2018




**Tesis ini disusun untuk memenuhi salah satu syarat memperoleh gelar  
Magister Sains (M.Si.)  
di  
Fakultas Matematika, Komputasi, dan Sains Data  
Institut Teknologi Sepuluh Nopember**

**Oleh:  
Nur Ilmayasinta  
NRP. 0611 1650 012 003**

**Tanggal Ujian  
Periode Wisuda**

**: 27 Juli 2018  
: September 2018**

**Disetujui oleh:**



**Dr. Dra. Mardijah, M.T.  
NIP. 19670114 199102 2 001**

**(Pembimbing)**



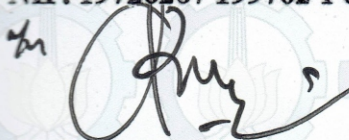
**Prof. Dr. Erna Apriliani, M.Si  
NIP. 19660414 199102 2 001**

**(Penguji)**



**Dr. Didik Khusnul Arif, S.Si, M.Si  
NIP. 19720207 199702 1 001**

**(Penguji)**



**Subchan, Ph.D  
NIP. 19710513 199702 1 001**

**(Penguji)**



**Dekan FMKSD,**

**Prof. Dr. Basuki Widodo, M.Sc.  
NIP. 19650605 198903 1 002**



**KENDALI OPTIMAL PADA MODEL EKSTRAKSI LIPID  
MIKROALGA MENGGUNAKAN METODE LQR (*LINEAR  
QUADRATIC REGULATOR*) DAN METODE PMP  
(*PONTRYAGIN MAXIMUM PRINCIPLE*)**

Nama Mahasiswa : Nur Ilmayasinta  
NRP : 0611 1650 012 003  
Pembimbing : Dr. Dra. Mardlijah, M.T.

**Abstrak**

*Tanaman yang berpotensi cukup baik sebagai bahan baku biodiesel adalah alga atau ganggang. Chlorella Vulgaris merupakan salah satu ganggang yang paling ekonomis untuk menghasilkan biodiesel, sebab ganggang hijau ini kaya karbohidrat, tak memerlukan perawatan khusus, dan mudah tumbuh. Minyak alga yang diperoleh untuk produksi biodiesel diperoleh melalui proses yang cukup panjang, salah satunya adalah proses ekstraksi lipid. Dalam penelitian ini ditunjukkan verifikasi model matematika ekstraksi lipid mikroalga, agar didapatkan nilai yang optimal pada variabel state yang selanjutnya dilakukan kendali optimal. Selanjutnya dilakukan kendali optimal dengan tujuan memaksimalkan konsentrasi lipid dalam aliran pelarut ( $C_s$ ), dan dalam partikel mikroalga ( $C_p$ ) dengan meminimalkan volume pelarut ( $v$ ), yang dimasukkan menggunakan metode LQR dan metode PMP. Dengan menggunakan software Matlab, didapat bahwa untuk metode LQR, sebelum dilakukan kontrol saat  $t = 1800$  ( $C_s, C_p, C_l$ ) = (0.502, 0.299, 0.1009) dan setelah dilakukan kontrol  $C_s, C_p, C_l$ ) = (7.2785, 3.1913, 0.1063). Selanjutnya untuk metode PMP sebelum dilakukan kontrol didapat bahwa ( $C_s, C_p, C_l$ ) = (0, 0.3046, 0.1009) dan setelah dilakukan kontrol menjadi ( $C_s, C_p, C_l$ ) = (7.4138, 9.0401, 0.1709). Sehingga dari simulasi yang dilakukan didapat bahwa metode PMP lebih optimal pada sistem ini dibandingkan dengan metode LQR.*

**Kata-kunci:** Mikroalga, Kendali Optimal, Linear Quadratic Regulator, Pontryagin Maximum Principle, Verifikasi Model





**OPTIMAL CONTROL OF LIPID EXTRACTION MODEL ON  
MICROALGAE USING LQR (*LINEAR QUADRATIC  
REGULATOR*) AND PMP (*PONTRYAGIN MAXIMUM  
PRINCIPLE*) METHODS**

Name : Nur Ilmayasinta  
NRP : 0611 1650 012 003  
Supervisor : Dr. Dra. Mardlijah, M.T.

**Abstract**

*Plants that are quite good as raw materials of biodiesel are algae. Chlorella Vulgaris is one of the most economical algae to produce biodiesel, because these green algae are rich in carbohydrates, require no special care, and are easy to grow. Algae oil obtained for biodiesel production is obtained through a fairly long process, one of which is the process of lipid extraction. In this study, we discussed the model of checking on mathematical model of lipid extraction of microalgae. Furthermore, optimal control is performed with the aim of maximizing lipid concentration in the solvent flow ( $C_s$ ), and in the microalgae particles ( $C_p$ ) by minimizing the volume of solvent ( $v$ ), which is incorporated using the LQR and PMP methods. By using software Matlab, it is found that for the LQR method, before the current control at  $t = 1800$ ,  $(C_s, C_p, C_l) = (0.502, 0.299, 0.1009)$  and after controlling  $C_s, C_p, C_l = (7.2785, 3.1913, 0.1063)$ . Furthermore, for the PMP method before the control, it is found that  $(C_s, C_p, C_l) = (0, 0.3046, 0.1009)$  and after the control is  $(C_s, C_p, C_l) = (7, 4138, 9, 0401, 0.1709)$ . So that from the simulation, it was found that the PMP method is more optimal in this system compared to the LQR method.*

**Key-words:** Microalgae, Optimal Control, Linear Quadratic Regulator, Pontryagin Maximum Principle, Model Verification



## KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Wr. Wb.

Alhamdulillahirobbil'aalamiin, segala puji dan syukur penulis panjatkan kehadirat Allah SWT yang telah memberikan limpahan rahmat, petunjuk serta hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan Tesis yang berjudul

**”Kendali Optimal pada Model Ekstraksi Lipid Mikroalga  
Menggunakan Metode LQR (*Linear Quadratic Regulator*) dan  
Metode PMP (*Pontryagin Maximum Principle*)”**

sebagai salah satu syarat kelulusan Program Magister Departemen Matematika FMKSD Institut Teknologi Sepuluh Nopember (ITS) Surabaya.

Tesis ini dapat terselesaikan dengan baik berkat bantuan dan dukungan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis menyampaikan ucapan terima kasih dan penghargaan kepada:

1. Suami, Orang Tua, Mertua dan seluruh keluarga. Terima Kasih atas doa yang tak henti-hentinya, cinta, kasing sayang, perhatian, dan dukungannya selama ini. Semoga Penulis bisa membahagiakan Orang tua. Aamiin
2. Prof. Ir. Joni Hermana, M.Sc.ES., Ph.D selaku Rektor Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya.
3. Bapak Dr. Imam Mukhlash, S.Si, MT selaku Kepala Departemen Matematika FMKSD ITS Surabaya.
4. Ibu Dr. Dra. Mardlijah, MT selaku pembimbing Tesis atas segala bimbingan dan motivasinya kepada penulis dalam mengerjakan Tesis ini sehingga dapat terselesaikan dengan baik.
5. Ibu Prof. Dr. Erna Apriliani, M.Si, Bapak Dr. Didik Khusnul Arif, S.Si, M.Si, dan Bapak Subchan, Ph.D selaku dosen penguji atas semua saran yang telah diberikan demi perbaikan Tesis ini.
7. Bapak Dr. Budi Setiyono, S.Si, MT selaku dosen wali yang telah memberikan arahan akademik selama penulis menempuh pendidikan di Departemen Matematika FMKSD ITS.
6. Bapak dan Ibu dosen serta para staf Departemen Matematika FMKSD ITS yang tidak dapat penulis sebutkan satu-persatu.
7. Teman-teman se-angkatan S2 Matematika ITS, terima kasih atas doa dan dukungan kalian selama ini.

8. Yuni Puspitasari, Annisa Rahmita Soemarsono, Fitria Fatimia Ayuni, Nihaya Alivia Coraima Dewi, Tsaniyatus Silvi Romadloni, terima kasih atas doa dan dukungan kalian selama ini.

Apabila dalam penulisan Tesis ini masih terdapat kekurangan, maka penulis mengharapkan kritik dan saran yang bersifat membangun demi kesempurnaan Tesis ini. Akhirnya, penulis berharap semoga Tesis ini dapat bermanfaat bagi banyak pihak.

Surabaya, Juli 2018

Penulis

## DAFTAR ISI

	Hal
HALAMAN JUDUL	i
LEMBAR PENGESAHAN	v
ABSTRAK	vii
ABSTRACT	ix
KATA PENGANTAR	xi
DAFTAR ISI	xiii
DAFTAR GAMBAR	xv
DAFTAR NOTASI	xvii
DAFTAR TABEL	xix
<b>BAB 1      PENDAHULUAN</b>	<b>1</b>
1.1 Latar Belakang .....	1
1.2 Rumusan Masalah .....	3
1.3 Batasan Masalah .....	3
1.4 Tujuan Penelitian .....	3
1.5 Manfaat Penelitian .....	4
<b>BAB 2      KAJIAN PUSTAKA DAN DASAR TEORI</b>	<b>5</b>
2.1 Penelitian Terdahulu .....	5
2.2 Model Matematika Ekstraksi Lipid Mikroalga .....	6
2.3 Kriteria Routh-Hurwitz .....	9
2.4 Keterkontrolan Sistem .....	10
2.5 Verifikasi Model .....	11
2.6 Linear Quadratic Regulator .....	11
2.7 Persamaan Differensial Riccati .....	12
2.8 Pontryagin Maximum Principle .....	14
<b>BAB 3      METODE PENELITIAN</b>	<b>17</b>
3.1 Studi Literatur .....	17
3.2 Menentukan Kestabilan dan Keterkontrolan Sistem .....	17
3.3 Melakukan Verifikasi Model .....	17
3.4 Menentukan Penyelesaian Kendali Optimal .....	17
3.5 Simulasi .....	17
3.6 Analisis Hasil Simulasi .....	17
3.7 Penarikan Kesimpulan dan Saran .....	18
3.8 Penyusunan Tesis .....	18
3.9 Diseminasi Hasil Penelitian .....	18

BAB 4	Pembahasan	19
4.1	Persamaan Model Matematika Ekstraksi Lipid Mikroalga . . . .	19
4.2	Analisa Kestabilan . . . . .	20
4.3	Analisa Keterkontrolan . . . . .	21
4.4	Analisa Keteramatan . . . . .	22
4.5	Verifikasi Model . . . . .	24
4.6	Penyelesaian Kendali Optimal dengan Metode PMP . . . . .	25
4.7	Penyelesaian Kendali Optimal dengan Metode LQR . . . . .	29
BAB 5	KESIMPULAN DAN SARAN	33
5.1	Kesimpulan . . . . .	33
5.2	Saran . . . . .	34
DAFTAR PUSTAKA		35
LAMPIRAN		37

## DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1	Skema <i>Verifikasi Model</i> .....	11
Gambar 4.1	Safety Sistem pada Konsentrasi Lipid dalam Aliran Pelarut .....	25
Gambar 4.2	Safety Sistem pada Konsentrasi Lipid dalam Partikel Mikroalga .....	25
Gambar 4.3	Safety Sistem pada Konsentrasi Lipid dipermukaan Partikel .....	25
Gambar 4.4	Konsentrasi lipid dalam aliran pelarut ( $C_s$ ) .....	28
Gambar 4.5	Konsentrasi lipid dalam partikel mikroalga ( $C_p$ ) .....	28
Gambar 4.6	Konsentrasi lipid di permukaan partikel ( $C_l$ ) .....	29
Gambar 4.7	Konsentrasi lipid dalam aliran pelarut ( $C_s$ ) .....	31
Gambar 4.8	Konsentrasi lipid dalam partikel mikroalga ( $C_p$ ) .....	31
Gambar 4.9	Konsentrasi lipid di permukaan partikel ( $C_l$ ) .....	32





## DAFTAR NOTASI

$J$	Fungsi Objektif
$C_l$	Konsentrasi lipid di permukaan partikel
$C_p$	Konsentrasi lipid dalam partikel mikroalga
$C_s$	Konsentrasi lipid dalam aliran pelarut
$k_a$	Konstanta kinetik adsorpsi
$k_d$	Konstanta kinetik desorpsi
$k_f$	Koefisien transfer massa
$C_{sat}^*$	Konsentrasi lipid dalam keseimbangan
$\varepsilon_P$	Porositas partikel mikroalga
$S$	Kecepatan aliran pelarut
$a$	Luas permukaan partikel mikroalga ( $4\pi r^2$ )
$\rho$	Massa jenis pelarut
$V$	Volume pelarut



## DAFTAR TABEL

Tabel 2.1	Keterangan Variabel dan Parameter Model Ekstraksi . . . .	9
Tabel 4.1	Nilai Parameter Model Ekstraksi Mikroalga <i>Chlorella vulgaris</i> . . . . .	21



# BAB 1

## PENDAHULUAN

Pada bab ini dijelaskan mengenai hal-hal yang menjadi latar belakang penelitian, termasuk penelitian-penelitian terdahulu yang terkait dengan penelitian ini. Sehingga dapat disusun suatu rumusan masalah, batasan masalah, tujuan penelitian dan manfaat dari penelitian ini.

### 1.1 Latar Belakang

Jumlah populasi penduduk yang meningkat dengan pesat menyebabkan terjadinya peningkatan konsumsi energi dunia. Selama ini, kebutuhan energi dunia terpenuhi oleh penggunaan bahan bakar fosil berupa batu bara, minyak bumi, dan gas alam yang semakin lama semakin menipis karena meningkatnya konsumsi energi dunia dan bahan bakar fosil ini tidak dapat diperbaharui. Oleh karena itu diperlukan sumber energi alternatif dan terbarukan. Biodiesel dan bioetanol adalah dua jenis bahan bakar nabati potensial yang telah menarik perhatian dunia. Biodiesel merupakan bahan bakar minyak yang terbuat dari bahan terbarukan seperti tumbuhan maupun hewan yang dipakai sebagai alternatif bahan bakar fosil. Biodiesel memiliki angka setana 10 – 15 lebih tinggi dari solar, sehingga proses pembakaran lebih cepat, mesin jadi lebih halus dan tidak berisik (Dyah, 2011).

Biodiesel sendiri dapat diproduksi dari berbagai sumber bahan baku, seperti kelapa sawit, kedelai, jarak pagar, serta tanaman lain yang berpotensi cukup baik sebagai bahan baku biodiesel adalah alga atau ganggang. Keunggulan alga dibandingkan bahan nabati lain adalah proses pengambilan minyak dilakukan tanpa penggilingan dan langsung diekstrak dengan bantuan zat pelarut (Yosta, 2015). *Chlorella Vulgaris* merupakan salah satu ganggang yang paling ekonomis untuk menghasilkan biodiesel, sebab ganggang hijau ini kaya karbohidrat, tak memerlukan perawatan khusus, dan mudah tumbuh. Anggota family Chlorophyceae itu kaya karbohidrat yang penting dalam pembuatan biodiesel. Kadar karbohidratnya 29 – 31% setara karbohidrat dalam singkong. Singkong berkadar pati 23% sehingga untuk menghasilkan satu liter bioetanol perlu 6,5 kg, dengan bahan baku *Chlorella Vulgaris*, jumlah biodiesel yang dihasilkan 100 kali lipat, karena pemanenan dapat dilakukan berkali-kali. Setiap hektar lahan budidaya alga mampu menghasilkan biodiesel sekitar 50 kiloliter, sedangkan 1 hektar kelapa sawit hanya menghasilkan sekitar 5 – 6 kiloliter (Sugiyono, dkk, 2014).

Minyak alga yang diperoleh untuk produksi biodiesel diperoleh melalui proses yang cukup panjang, salah satunya adalah proses ekstraksi lipid. Ekstraksi adalah proses pemisahan komponen dari bahan padat dengan bantuan pelarut. Pada penelitian ini, jenis ekstraksi yang digunakan adalah ekstraksi padat-cair menggunakan metode Soxhlet. Proses ekstraksi lipid

dengan alat Soxhlet merupakan proses ekstraksi yang menggunakan penyarian berulang dan pemanasan. Ekstraksi kontinu dilakukan karena padatan lipid yang larut di dalam pelarut hanya sedikit. Pada proses ekstraksi dengan alat Soxhlet terjadi proses perpindahan massa lipid yang terkandung dalam *Chlorella vulgaris* menuju aliran CXM ( $CO_2$ -Expanded Methanol). Proses perpindahan massa lipid dari mikroalga ini yang akan dibentuk persamaan diferensialnya untuk digunakan sebagai model matematika untuk memprediksi hasil lipid yang dapat diekstrak untuk selanjutnya digunakan sebagai bahan utama produksi biodiesel. Keuntungan penggunaan metode ini adalah penggunaan pelarut dapat dihemat karena terjadi sirkulasi pelarut.

Pada penelitian terdahulu, telah banyak penelitian tentang optimal kontrol dan pertumbuhan mikroalga. Penelitian yang telah dilakukan mengenai optimal kontrol pada pertumbuhan mikroalga, antara lain: Pemodelan Perpindahan Massa Pada Ekstraksi Lipid Kontinu Mikroalga *Chlorella Vulgaris* Dengan Pelarut CXM ( $CO_2$ -Expanded Methanol) (Siahaan, 2016). Pada penelitian tersebut merujuk pada penelitian yang berjudul, Optimization of Continous Lipid Extraction from *Chlorella Vulgaris* by  $CO_2$ -Expanded Methanol for Biodiesel Production (Yi-Hung, 2015). Selain itu, tentang produksi lipid netral dengan keterbatasan nutrisi dan karbondioksida (Mardlijah, 2017), tentang pertumbuhan alga dengan kendali optimal berupa aliran karbondioksida (Hajar, 2015), dan tentang optimal kontrol pertumbuhan alga dengan kendali optimal berupa aliran nutrisi dan karbondioksida (Jamil, 2017).

Dalam (Baier, Katoen, 2008) dijelaskan bahwa suatu model matematika dapat dilakukan verifikasi sistem. Verifikasi sistem bertujuan untuk mengetahui keadaan variabel, parameter serta perubahan yang terjadi pada kondisi yang ditentukan. Penyelesaian verifikasi dengan menggunakan *tools* aplikasi. Aplikasi verifikasi yang dibutuhkan untuk menyelesaikan model sistem dinamik adalah Flowstar (Chen, etc., 2015). Untuk mendapatkan model yang optimal dapat digunakan Metode LQR dan Metode PMP. Teori kendali optimal sendiri berkaitan dengan analisis sistem dinamis yang terkontrol, dimana sebuah sistem diarahkan dari konfigurasi yang diberikan beberapa target yang diinginkan dengan meminimalkan atau memaksimalkan beberapa kriteria (Loic, 2015). Pada metode LQR dan metode PMP terdapat fungsi objektif yang digunakan sebagai ukuran seberapa besar kinerja sistem. Untuk formulasi LQR memiliki kelebihan mudah dalam menganalisis dan pengimplementasiannya (Naidu, 2016). Metode kendali optimal lain yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode PMP, metode ini digunakan untuk memperoleh kendali terbaik pada sistem dinamik dari state awal hingga akhir, yaitu dengan memaksimumkan fungsi objektif. Metode ini merupakan metode yang lebih modern dibanding metode lain, seperti LQR salah satunya.

Peneliti melihat solusi verifikasi model (Baier, Katoen, 2008), (Chen, etc., 2015) dan kendali optimal (Naidu, 2016), yang pada penelitian ini dilakukan kendali optimal dengan tujuan untuk mengoptimalkan hasil konsentrasi lipid dalam aliran pelarut ( $C_s$ ), dalam partikel mikroalga ( $C_p$ ), dan meminimalkan

volume pelarut ( $v$ ) sehingga dapat menyempurnakan penelitian (Siahaan, 2016), juga memberikan informasi analisa hasil antara dua metode LQR dan metode PMP yang digunakan pada model matematika yang didapat.

## 1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, disusun beberapa rumusan masalah yang dibahas dalam penelitian ini yaitu:

1. Bagaimana implementasi verifikasi model matematika perpindahan massa pada ekstraksi lipid kontinu mikroalga *Chlorella Vulgaris* dengan pelarut CXM?
2. Bagaimana mengkonstruksi kendali optimal pada ekstraksi lipid kontinu mikroalga *Chlorella Vulgaris* dengan pelarut CXM menggunakan metode LQR dan metode PMP?
3. Bagaimana analisa hasil simulasi kendali optimal ekstraksi lipid kontinu mikroalga *Chlorella Vulgaris* dengan pelarut CXM menggunakan metode LQR dan metode PMP?

## 1.3 Batasan Masalah

Dalam rencana penelitian tesis ini diberikan beberapa batasan masalah dengan rincian sebagai berikut.

1. Mikroalga yang digunakan dalam penelitian ini adalah *Chlorella vulgaris*.
2. Pelarut yang digunakan adalah CXM (*CO<sub>2</sub>-Expanded Methanol*).
3. Data yang digunakan berdasarkan pada eksperimen Yi-Hung Yang dkk pada jurnal Bioresource Technology 198(2015).

## 1.4 Tujuan Penelitian

Tujuan yang ingin dicapai dalam perencanaan penelitian tesis ini adalah sebagai berikut.

1. Memperoleh hasil verifikasi model matematika perpindahan massa pada ekstraksi lipid kontinu mikroalga *Chlorella Vulgaris* dengan pelarut CXM.
2. Memperoleh model matematika perpindahan massa pada ekstraksi lipid kontinu mikroalga *Chlorella Vulgaris* dengan pelarut CXM yang optimal, dengan kendali optimal menggunakan metode LQR dan metode PMP.
3. Memperoleh analisa hasil konsentrasi lipid dalam aliran pelarut, dan dalam partikel mikroalga dengan menggunakan metode LQR dan metode PMP.

### **1.5 Manfaat Penelitian**

Manfaat dari perencanaan penelitian tesis ini adalah:

1. Memberikan informasi mengenai hasil konsentrasi lipid dalam aliran pelarut, dan dalam partikel mikroalga dengan meminimumkan volume pelarut sehingga diperoleh hasil yang optimal.
2. Memberikan wawasan penerapan ilmu matematika terapan dalam kimia dan biologi.



## BAB 2

### KAJIAN PUSTAKA DAN DASAR TEORI

Dalam bab ini dibahas mengenai kajian pustaka dan dasar teori yang berkaitan dengan topik penelitian tesis yaitu penelitian terdahulu, model matematika ekstraksi lipid kontinu mikroalga *Chlorella vulgaris* dengan pelarut CXM, formulasi kestabilan, keterkontrolan, verifikasi model dengan Flowstar, dan kendali optimal menggunakan metode LQR dan metode PMP.

#### 2.1 Penelitian Terdahulu

Dalam penelitian ini penulis merujuk pada beberapa penelitian terdahulu yang sesuai dengan topik yang diambil. Rujukan utama yang digunakan adalah penelitian yang dilakukan oleh Sriati Monalisa Siahaan (2016) yang berjudul *Pemodelan Perpindahan Massa Pada Ekstraksi Lipid Kontinu Mikroalga Chlorella Vulgaris Dengan Pelarut CXM ( $CO_2$ -Expanded Methanol)* (Siahaan, 2016). Pada penelitian tersebut merujuk pada penelitian yang dilakukan oleh Yi-Hung Yang dkk (2015) yang berjudul *Optimization of Continuous Lipid Extraction from Chlorella Vulgaris by  $CO_2$ -Expanded Methanol for Biodiesel Production* (Yi-Hing, 2015). Selain beberapa penelitian diatas, ada juga beberapa penelitian yang dapat digunakan untuk mendukung penelitian ini yaitu Nanda Dewi Oktavianti (2016) yang berjudul *Kendali Optimal Pertumbuhan Mikroalga Melalui Tingkat Pengenceran Nutrisi* (Oktavianti, 2016), penelitian yang dilakukan oleh Hajar yang berjudul *Kendali Karbon Dioksida Pada Model Pertumbuhan Alga* (Hajar, Mardlijah, 2015). Pada penelitian yang dilakukan oleh Sriati Monalisa Siahaan (2016) menjelaskan tentang pemodelan matematika untuk proses transfer massa ekstraksi lipid *Chlorella vulgaris* dengan pelarut CXM ( $CO_2$ -Expanded Methanol) dengan alat Soxhlet dan dilakukan analisis sistem proses ekstraksi (Siahaan, 2016). Sedangkan pada penelitian yang dilakukan oleh Yi-Hung Yang (2015) menjelaskan tentang proses optimasi ekstraksi lipid kontinu dari *Chlorella vulgaris* dengan menggunakan pelarut CXM untuk proses produksi biodiesel (Yi-Hing, 2015). Pada penelitian yang dilakukan oleh Nanda Dewi Oktavianti (2016) menjelaskan tentang solusi memaksimalkan hasil biofuel dari mikroalga dengan cara melakukan kendali optimal terhadap pengenceran nutrisi pada model Thornton pertumbuhan mikroalga dengan menggunakan Prinsip Maksimum Pontryagin (Oktavianti, 2016). Pada penelitian yang dilakukan oleh Hajar menjelaskan tentang analisis sifat-sifat sistem dan pengoptimalan pertumbuhan alga dengan menggunakan metode prinsip maksimum pontryagin berdasarkan parameter yang ada pada model matematika pertumbuhan alga, sehingga dapat menghasilkan bahan bakar biodiesel yang banyak (Hajar, Mardlijah, 2015)

## 2.2 Model Matematika Ekstraksi Lipid Mikroalga

Berdasarkan mekanisme proses ekstraksi, maka pembentukan subsistem dapat diuraikan sebagai berikut. Proses ekstraksi mikroalga merupakan proses pelepasan solut (lipid) dari matriks sel ke dalam pelarut. Proses ini merupakan proses perpindahan massa. Solut yang berada dalam matriks sel akan dilepaskan dan terikat dengan pelarut yang berdifusi ke dalam sel dengan proses pelarutan. Selanjutnya, solut yang terlarut akan berdifusi melalui pori menuju permukaan partikel. Pada bagian luar dari partikel mikroalga terdapat lapisan film yang memisahkan antara konsentrasi pada aliran dan konsentrasi di permukaan partikel. Akhirnya, solut bergerak melewati lapisan film stagnan di sekeliling partikel menuju aliran pelarut. Ilustrasi diatas kemudian menjadi dasar pembentukan model Matematika perpindahan massa lipid yang dibagi menjadi 3 subsistem yang dinyatakan sebagai berikut (Siahaan, 2016):

### a. Subsistem 1

Pada subsistem 1, digambarkan proses keseimbangan yang terjadi pada aliran pelarut dalam kolom ekstraksi. Secara umum dalam penyelesaian masalah, persamaan diferensial yang lengkap menggambarkan peristiwa konveksi aksial, dispersi aksial, dispersi radial, perpindahan massa dari permukaan padatan ke aliran pelarut dan akumulasi. Pendekatan model secara umum tersebut dalam bentuk persamaan adalah sebagai berikut:

$$\varepsilon V \frac{\partial C}{\partial t} + v V \frac{\partial C}{\partial z} = V D_L \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} + V \frac{D_R}{r} \frac{\partial(r \frac{\partial C}{\partial r})}{\partial r} - (1 - \varepsilon) V k_f (C - C_{sat}^*).$$

Peristiwa perpindahan massa ke arah aksial jauh lebih besar daripada peristiwa dispersi aksial. Dispersi aksial adalah mekanisme yang menyebabkan sampel menyebar di dalam pelarut, yang merupakan produk dari terbentuknya perbedaan kecepatan di dalam dimensi ruang, yang pada model ini dinyatakan dengan  $z$  yang menyatakan panjang kolom ekstraktor. Fenomena dispersi aksial, dengan pemberian dimensi waktu yang mencukupi dapat direpresentasikan dalam bentuk proses Difusi Fick. Sementara itu perpindahan massa karena dispersi radial, dimana ruang dispersi radial yang disimbolkan dengan  $r$  menyatakan perubahan yang terjadi terhadap jari-jari kolom ekstraksi, dapat diabaikan, karena aliran solut-pelarut ke arah aksial. Karena besarnya nilai dispersi aksial sangat kecil, maka dispersi aksial diabaikan.

Keseimbangan massa dalam aliran fluida dengan mengabaikan dispersi aksial dan dispersi radial adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} D_L \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} &= 0 \\ \frac{D_R}{r} \frac{\partial(r \frac{\partial C}{\partial r})}{\partial r} &= 0 \\ v V \frac{\partial C_s}{\partial z} + \varepsilon V \frac{\partial C_s}{\partial t} + (1 - \varepsilon_p) V \frac{\partial C_p}{\partial t} &= 0. \end{aligned}$$

Apabila diasumsikan bahwa proses ekstraksi terjadi secara seragam dalam arah aksial di sepanjang kolom ekstraktor selama waktu ekstraksi

kecil, maka dengan kata lain  $\frac{\partial C_s}{\partial z} = \text{konstan}$ , berdasarkan analisis dimensional dan kesetaraan besaran maka persamaan perpindahan massa ke arah aksial dapat dibentuk menjadi:

$$vV \frac{\partial C_s}{\partial z} = ([L]/[T])([L])^3 \left( \frac{[M]}{[L]} \div [L] \right).$$

Sehingga berdasarkan hubungan dari persamaan umum laju aliran massa:

$$S = (\rho \cdot a \cdot v),$$

dimana:

$S$  = laju aliran massa  $\left(\frac{kg}{s}\right), ([M]/[T])$

$\rho$  = massa jenis fluida  $\left(\frac{kg}{m^3}\right), ([M]/[L]^3)$

$a$  = luas penampang aliran  $(m^2), ([L]^2)$

$v$  = kecepatan aliran fluida  $\left(\frac{m}{s}\right), ([L]/[T])$ .

Dimana bentuk persamaan umum diatas dapat dibawa ke dalam bentuk persamaan serupa yang memiliki dimensi dan sifat-sifat yang mempengaruhi pelarut, yaitu diameter kolom ekstraksi dan diameter yang kecil, maka persamaan umum laju aliran massa dapat dibawa ke dalam bentuk:

$$vV \frac{\partial C_s}{\partial z} \rightarrow ([L]/[T])([L]^3) \left( \frac{[M]}{[L]^3} \rightarrow ([M]/[T]) \rightarrow \frac{kg}{s} \right)$$

$$\frac{S}{a\rho} V \frac{\partial C_s}{\partial z} \rightarrow (([M]/[T]) \div [L]^2 ([M]/[L]^3)) [L]^3 (([M]/[L]^3) \div [L]) \rightarrow \frac{S}{\rho} C_s.$$

Sehingga berdasarkan penyetaraan diatas diperoleh persamaan perpindahan massa ke arah aksial adalah  $vV \frac{\partial C_s}{\partial z} \rightarrow \frac{S}{\rho} C_s$ . Selanjutnya bentuk persamaan perpindahan massa pada aliran besar pelarut berubah menjadi:

$$\begin{aligned} \frac{S}{\rho} C_s + \varepsilon V \frac{dC_s}{dt} + (1 - \varepsilon_p) V \frac{dC_p}{dt} &= 0 \\ \varepsilon V \frac{dC_s}{dt} &= \left(-\frac{S}{\rho} C_s\right) - (1 - \varepsilon_p) V \frac{dC_p}{dt} \\ \frac{dC_s}{dt} &= -\frac{(1 - \varepsilon_p)}{\varepsilon} \frac{dC_p}{dt} - \frac{S}{\rho \varepsilon V} C_s, \end{aligned} \quad (2.1)$$

dimana:

$S$  : Kecepatan aliran pelarut

$\rho$  : Massa jenis pelarut.

b. Subsistem 2

Pada subsistem ini, terjadi proses keseimbangan massa pada partikel

mikroalga. Persamaan untuk subsistem 2 digambarkan sebagai perpindahan massa melalui bagian luar lapisan film, adalah sebagai berikut:

$$\frac{dC_p}{dt} = -\frac{k_f a(C_p - C_{sat}^*)}{V(1 - \varepsilon_p)}.$$

Berdasarkan persamaan umum perpindahan massa zat terlarut, maka dengan mempertimbangkan terjadinya proses perpindahan massa lipid dengan cara absorpsi maka persamaan diatas dapat dibawa ke dalam bentuk:

$$\frac{dC_p}{dt} = -\frac{k_f a(C_p - C_{sat}^*)}{V(1 - \varepsilon_p)} - \frac{dC_l}{dt}, \quad (2.2)$$

dimana  $\frac{dC_l}{dt}$  adalah perubahan massa partikel karena proses absorpsi.

c. Subsistem 3

Pada proses ini terjadi penyerapan pelarut CXM. Adsorpsi terjadi ketika pelarut terikat pada lipid di dalam mikroalga dan selanjutnya terjadi proses penyerapan berbalik arah untuk keluar dari fase padat (solid) partikel mikroalga. Dengan asumsi bahwa lipid memiliki permukaan yang homogen, proses ekstraksi terjadi pada keadaan isothermal dan laju adsorpsi berbeda dengan laju desorpsi, maka persamaan dapat dibentuk dengan mengikuti persamaan untuk proses adsorpsi (Halim, dkk, 2012) yaitu:

Tingkat masuk (adsorpsi):  $k_a$ .

Tingkat keluar (desorpsi):  $k_d$ .

Tingkat perubahan konsentrasi CXM yang diserap oleh lipid:

$$\frac{dC_l}{dt} = k_a C_p - k_d C_l, \quad (2.3)$$

dimana:

$C_l$  : Konsentrasi lipid di permukaan partikel

$k_a$  : Konstanta kinetik adsorpsi

$k_d$  : Konstanta kinetik desorpsi

$C_p$  : Konsentrasi partikel mikroalga.

Berdasarkan pada mekanisme ekstraksi pada setiap subsistem yang membentuk proses transfer massa lipid diatas yaitu pada persamaan (2.1), (2.2) dan (2.3) maka diperoleh model dinamik proses ekstraksi lipid mikroalga *Chlorella vulgaris* sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{dC_s}{dt} &= -\frac{(1 - \varepsilon_p)}{\varepsilon} \frac{dC_p}{dt} - \frac{S}{\rho \varepsilon V} C_s \\ \frac{dC_p}{dt} &= -\frac{k_f a(C_p - C_{sat}^*)}{V(1 - \varepsilon_p)} - \frac{dC_l}{dt} \\ \frac{dC_l}{dt} &= k_a C_p - k_d C_l. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Simbol	Keterangan	Satuan
$C_l$	Konsentrasi lipid di permukaan partikel	$\text{kg}/m^3$
$C_p$	Konsentrasi lipid dalam partikel mikroalga	$\text{kg}/m^3$
$C_s$	Konsentrasi lipid dalam aliran pelarut	$\text{kg}/m^3$
$k_a$	Konstanta kinetik adsorpsi	$1/s$
$k_d$	Konstanta kinetik desorpsi	$1/s$
$k_f$	Koefisien transfer massa	$m/s$
$C_{sat}^*$	Konsentrasi lipid dalam keseimbangan	$\text{kg}/m^3$
$\varepsilon_P$	Porositas partikel mikroalga	-
$S$	Kecepatan aliran pelarut	$\text{kg}/s$
$a$	Luas permukaan partikel mikroalga ( $4\pi r^2$ )	$m^2$
$\rho$	Massa jenis pelarut	$\text{kg}/m^3$
$V$	Volume pelarut	$m^3$

Tabel 2.1: Keterangan Variabel dan Parameter Model Ekstraksi

### 2.3 Kriteria Routh-Hurwitz

Nilai-nilai karakteristik dari matriks  $A$  adalah akar-akar karakteristik dari polinomial (Subiono,2013):

$$p(s) = \det(sI - A) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s^1 + a_0, \quad (2.5)$$

dengan  $a_n = 1$ . Kriteria kestabilan Routh-Hurwitz dapat dipakai untuk mengecek langsung kestabilan melalui koefisien  $a_i$  tanpa menghitung akar-akar dari polinomial yang ada, yaitu dengan melakukan penabelan dan suatu aturan penghitungan dari koefisien  $a_i$  akan diketahui bahwa apakah polinomial yang diberikan oleh persamaan (2.5) semua akar-akarnya bagian realnya adalah negatif.

Diberikan suatu polinomial

$$q(s) = \det(sI - A) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s^1 + a_0,$$

dimana  $a_n \neq 0$ , susun tabel sebagai berikut:

$$\begin{array}{c|cccc}
 s^n & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \dots \\
 s^{n-1} & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \dots \\
 s^{n-2} & b_1 & b_2 & b_3 & \\
 s^{n-3} & c_1 & c_2 & c_3 & \\
 \vdots & \vdots & & & \\
 s^0 & q & & & 
 \end{array}$$

dimana  $b_1, b_2, \dots, c_1, c_2, \dots$  dan  $q$  secara rekursif didapat dari:

Kriteria Routh-Hurwitz menyimpulkan bahwa: banyaknya perubahan tanda dalam kolom pertama pada tabel diatas sama dengan banyaknya akar-akar polinomial  $q(s)$  yang bagian realnya positif. Jadi bila pada kolom

$$b_1 = \frac{a_{n-1}a_{n-2}-a_na_{n-3}}{a_{n-1}}, \quad b_2 = \frac{a_{n-1}a_{n-4}-a_na_{n-5}}{a_{n-1}}, \quad \dots$$

$$c_1 = \frac{b_1a_{n-3}-b_2a_{n-1}}{b_1}, \quad c_2 = \frac{b_1a_{n-5}-b_3a_{n-1}}{b_1}, \quad \dots$$

pertama dalam tabel tidak ada perubahan tanda (semuanya bertanda positif atau semuanya bertanda negatif), maka semua akar polinomial  $q(s)$  bagian realnya adalah tak-positif, bila polinomial ini merupakan polinomial akar-akar karakteristik dari matriks  $A$  dimana  $\dot{x}(t) = Ax(t)$ , maka sistem ini adalah stabil.

## 2.4 Keterkontrolan Sistem

Diberikan sistem linear invarian-waktu yang disajikan oleh persamaan:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \quad (2.6)$$

**Definisi 2.1.** Sistem linear (2.6) dikatakan terkontrol bila untuk setiap keadaan sebarang  $x(0) = x_0$  ada masukan  $u(t)$  yang tidak dibatasi mentransfer keadaan  $x_0$  ke sebarang keadaan akhir  $x(t_1) = x_1$  dengan waktu akhir  $t_1$  hingga.

Dari pengertian sistem terkontrol yang diberikan dalam Denisi 2.1, hal ini berarti bahwa bila diberikan sebarang keadaan awal  $x(0)$  dan sebarang keadaan akhir  $x(t_1)$  akan selalu ada pengontrol  $u(t)$  yang akan mentransfer keadaan awal  $x(0)$  ke keadaan akhir yang diinginkan  $x(t_1)$  dalam waktu yang berhingga  $t_1$ . Perlu diingat bahwa sebarang keadaan awal dan sebarang keadaan akhir ini terdiri dari  $n$  komponen dan apa bila semua komponen dari keadaan awal ini bisa dikontrol ke  $n$  komponen yang sesuai keadaan akhir, maka sistem bisa dikontrol. Sedangkan maksud dari keberadaan pengontrol  $u(t)$  yang tak dibatasi adalah tidak disyaratkan apa-apa kecuali hanya untuk mentransfer sebarang keadaan awal yang diberikan ke sebarang keadaan akhir yang diinginkan dalam waktu yang berhingga. Dalam kajian kontrol optimal pemilihan pengontrol  $u(t)$  ini merupakan pengontrol yang mentransfer keadaan awal ke keadaan akhir yang diinginkan dengan energi yang sekecil mungkin (minimum).

Penyelesaian dari  $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$  diberikan oleh:

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau.$$

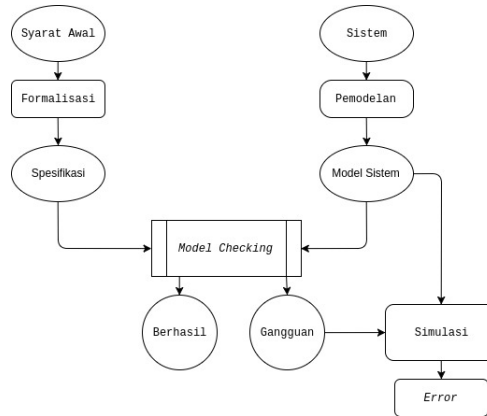
Bila sistem terkontrol, yaitu ada masukan  $u(t)$  yang mentransfer  $x_0$  ke  $x_1$  dalam waktu berhingga  $t = t_1$ . Dalam hal ini  $x_1$  diberikan oleh:

$$x_1 = e^{At_1}x_0 + \int_0^{t_1} e^{A(t_1-\tau)}Bu(\tau)d\tau.$$

**Teorema 2.1.** Syarat perlu dan cukup sistem (2.6) terkontrol adalah: Matriks  $M_c = (B \mid AB \mid A^2B \mid \dots \mid A^{n-1}B)$  mempunyai rank sama dengan  $n$ .

## 2.5 Verifikasi Model

Teknik verifikasi model merupakan dasar untuk menggambarkan model sesuai perilaku sistem dengan ketepatan matematika dan tidak ambigu. Berikut ilustrasi verifikasi model



Gambar 2.1: Skema *Verifikasi Model*

Dari banyak penelitian tentang model, jika dilakukan verifikasi model mengalami hal ketidaklengkapan, ambiguitas, dan ketidakkonsistenan dalam spesifikasi sistem model (Baier, Katoen, 2008). Masalah seperti itu biasanya hanya ditemukan pada tahap pendesainan model yang rumit. Sistem model yang disertai dengan algoritma dapat secara sistematis mengeksplorasi semua keadaan awal hingga keadaan akhir. Hal ini memberikan dasar untuk keseluruhan teknik verifikasi mulai dari eksplorasi menyeluruh (pengecekan model) sampai eksperimen dengan serangkaian pendesaian yang memiliki syarat batas dalam melakukan simulasi model, atau dalam kenyataan (implementasi). Verifikasi model dapat diterapkan pada sistem biologi, sistem kontrol serta model yang memiliki *variable state* dan parameter. Untuk menyelesaikan verifikasi model dapat menggunakan perangkat lunak, salah satunya adalah Flowstar.

Flowstar merupakan perangkat lunak yang digunakan untuk melakukan verifikasi model pada sistem *hybrid*. Flowstar juga merupakan salah satu perangkat lunak untuk menyelesaikan sistem Persamaan Diferensial Biasa. Pada penelitian sebelumnya, sudah ada penelitian mengenai perhitungan komputasi untuk menyelesaikan sistem kontinu pada sistem *non-linear* Persamaan Diferensial Biasa (Chen, etc., 2015). Keluaran yang diharapkan dengan menggunakan Flowstar adalah dengan mengetahui perkiraan nilai pada variabel *state* berdasarkan interval waktu yang diperlukan.

## 2.6 Linear Quadratic Regulator

Metode *Linear Quadratic Regulator* merupakan salah satu kontrol optimal dimana mempunyai maksud hasil paling baik yang dapat dicapai dengan memperhatikan kondisi dan kendala dari suatu sistem. Dalam sistem

kontrol optimal, istilah optimal sering kali merujuk pada minimal, misalnya meminimalkan bahan bakar, waktu, dan kesalahan. Kontrol optimal secara umum digunakan untuk memilih *input plant*  $u$  dengan indeks performansi yang minimum. Pada suatu sistem, indeks performansi dipilih sesuai dengan bagian yang akan dioptimalkan. Bentuk umum dari persamaan state sistem linear dapat ditulis sebagai berikut :

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t).\end{aligned}$$

Keterangan :

- $A_{n \times n}$  : Matriks Ruang Keadaan
- $B_{n \times m}$  : Matriks Masukan Kendali
- $C_{r \times n}$  : Matriks Keteramatan
- $x(t)$  : Vektor Ruang Keadaan
- $y(t)$  : Proses Keluaran
- $u(t)$  : Proses Masukan.

Untuk matriks  $A, B$  dan  $C$  merupakan matriks yang memiliki sifat invarian waktu. Metode LQR berfungsi untuk mencari *gain regulator* sesuai dengan persamaan model *state space* dengan meminimumkan nilai dari fungsi biaya (Naidu, 2002) sebagai berikut :

$$J = \frac{1}{2} (x^T P_c x) + \frac{1}{2} \int_0^\infty (x^T Q_c x + u^T R_c u) dt. \quad (2.7)$$

## 2.7 Persamaan Differensial Riccati

Pada subbab ini akan dibahas mengenai hubungan Persamaan Differensial Riccati dengan *gain regulator*  $P_c$ . Dengan mengambil persamaan *state*  $\dot{x}$ , maka dapat ditulis dengan :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t). \quad (2.8)$$

Untuk memperoleh persamaan diferensial Riccati, akan dilakukan beberapa pembuktian dengan langkah langkah sebagai berikut :

### 1. Fungsi Hamiltonian

Diberikan Fungsi Hamiltonian yang di formulasikan dengan persamaan (2.7), sehingga dapat dinyatakan sebagai berikut :

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} x^T Q x + \frac{1}{2} u_c^T R u_c + \lambda^T (Ax + Bu_c). \quad (2.9)$$

Persamaan (2.9) digunakan untuk mencari persamaan *state*, *costate* dan fungsi kendali.

### 2. Kendali Optimal

Untuk mendapat fungsi kendali  $u_c^*$ , maka dengan menurunkan fungsi Hamiltonian terhadap  $u_c$ . Sehingga dapat ditulis sebagai berikut :

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u} = 0 \longrightarrow Ru_c + B^T \lambda,$$



sehingga diperoleh nilai  $u_c^*$  sebagai berikut :

$$u_c^* = -R^{-1}B^T\lambda. \quad (2.10)$$

### 3. Persamaan *State* dan *Costate*

Persamaan *state* didapatkan dengan cara menurunkan fungsi Hamiltonian terhadap  $\lambda$ , sehingga dapat ditulis sebagai berikut

$$\dot{x} = \left( \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \lambda} \right) \longrightarrow \dot{x} = Ax + Bu_c. \quad (2.11)$$

Persamaan *costate* didapatkan dengan menurunkan fungsi Hamiltonian terhadap  $x$ , sehingga dapat ditulis sebagai berikut

$$\dot{\lambda} = \left( \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} \right) \longrightarrow \dot{\lambda} = -Qx - A^T\lambda, \quad (2.12)$$

dengan mensubstitusikan persamaan kendali optimal (2.10) kedalam persamaan *state* (2.11) sehingga akan dibentuk matriks persamaan *state* dan *costate* sebagai berikut ini :

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B^T \\ -Q & -A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \lambda \end{bmatrix}. \quad (2.13)$$

### 4. Kendali Optimal dengan *Gain Regulator*

Persamaan berikut dapat diasumsikan dengan transformasi, sehingga dapat ditulis,

$$\lambda = P_c x, \quad (2.14)$$

dengan mensubstitusikan persamaan (2.14) kedalam fungsi kendali optimal (2.10), maka dapat dinyatakan sebagai berikut,

$$u_c^* = -R^{-1}B^T P_c x. \quad (2.15)$$

Fungsi turunan dari persamaan (2.14) ditulis sebagai berikut :

$$\dot{\lambda} = \dot{P}_c x + P_c \dot{x}, \quad (2.16)$$

dengan mensubstitusikan persamaan transformasi (2.14) kedalam persamaan kendali, *state* dan *costate* didapatkan hasil sebagai berikut :

$$\dot{x} = Ax - BR^{-1}B^T P_c x \quad (2.17)$$

$$\dot{\lambda} = -Qx - A^T P_c x, \quad (2.18)$$

dengan mensubstitusikan persamaan (2.17) dan (2.18) kedalam persamaan (2.16) sehingga dapat dinyatakan dengan persamaan berikut,

$$\begin{aligned} -Qx - A^T P_c x &= \dot{P}_c x + P_c (Ax - BR^{-1}B^T P_c x) \\ \left[ \dot{P}_c + P_c A + A^T + Q + P_c B R^{-1} B^T P_c \right] x &= 0, \end{aligned} \quad (2.19)$$

dari persamaan (2.19) dapat disimpulkan bahwa persamaan diferensial riccati (Naidu, 2002) dapat ditulis sebagai berikut,

$$\dot{P}_c = -P_c A - A^T P_c - Q + P_c B R^{-1} B^T P_c. \quad (2.20)$$

## 2.8 Pontryagin Maximum Principle

Metode *Pontryagin Maximum Principle* merupakan salah satu cara dalam menyelesaikan masalah kendali optimal dengan kendala yang terbatas. Metode ini digunakan untuk memperoleh kendali terbaik pada sistem dinamik dari state awal hingga akhir, yaitu dengan memaksimumkan fungsi objektif. Permasalahan ini telah dikembangkan oleh L.S. Pontryagin dan rekan kerjanya pada tahun 1950 yang diaplikasikan untuk semua masalah kalkulus variasi. Oleh karena itu, prinsip ini disebut sebagai Pontryagin Maximum Principle. Metode ini merupakan metode yang lebih modern dibanding metode lainnya, LQR salah satunya. Prinsip ini menyatakan secara informal bahwa persamaan Hamiltonian akan dimaksimumkan sepanjang  $U$  yang merupakan himpunan kendali yang mungkin. Dengan memperhatikan persamaan keadaan dan fungsi tujuan yang telah diberikan, langkah dalam menyelesaikan masalah kendali optimal adalah sebagai berikut :

- a. Langkah 1

Bentuk fungsi Hamiltonian ( $H$ ) sebagai berikut:

$$H(x(t), u(t), \lambda(t), t) = V(x(t), u(t), \lambda(t), t) + \lambda'(t)f(x(t), u(t), t),$$

dimana  $(')$  merupakan *transpose*.

- b. Langkah 2

Memaksimumkan  $H$  terhadap  $u(t)$  dengan cara:

$$\left( \frac{\partial H}{\partial u(t)} \right) = 0,$$

sehingga diperoleh kondisi stasioner  $u^*(t) = h(x^*(t), \lambda^*(t), t)$ .

- c. Langkah 3

Dengan menggunakan hasil yang diperoleh dari langkah 2, akan didapatkan fungsi Hamiltonian yang optimal  $H^*$ , yaitu:

$$H^*(x^*(t), h(x^*(t), \lambda^*(t), t), \lambda^*(t), t) = H^*(x^*(t), \lambda^*(t), t).$$

- d. Langkah 4

Selesaikan  $2n$  persamaan diferensial, dengan  $n$  adalah jumlah variabel keadaan:

$$\dot{x}^*(t) = \left( \frac{\partial H}{\partial \lambda} \right)_*,$$

dan persamaan *costate* yaitu:

$$\dot{\lambda}^*(t) = - \left( \frac{\partial H}{\partial x} \right)_*$$

dengan kondisi batas diberikan oleh keadaan awal dan keadaan akhir yang disebut kondisi *transversality*. Kondisi batas secara umum sebagai berikut:

$$\left(H^* + \frac{\partial S}{\partial t}\right)_{t_f} \delta t_f + \left[\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)_* - \lambda^*\right]'_{t_f} \delta x_f = 0.$$

e. Langkah 5

Substitusi hasil yang diperoleh dari langkah 4 ke dalam persamaan  $u^*(t)$  pada langkah 2 untuk mendapatkan kendali optimal yang dicari (Subiono, 2003).



## **BAB 3**

### **METODE PENELITIAN**

Pada bagian ini diuraikan beberapa metode penelitian yang digunakan atau dikerjakan untuk mencapai tujuan penelitian

#### **3.1 Studi Literatur**

Dalam tahap ini dilakukan identifikasi permasalahan dan studi literatur dari beberapa buku, jurnal dan referensi lain mengenai model matematika ekstraksi lipid kontinu mikroalga *Chlorella Vulgaris* dengan pelarut CXM, teori kendali optimal dengan menggunakan metode LQR dan metode PMP.

#### **3.2 Menentukan Kestabilan dan Keterkontrolan Sistem**

Menentukan kestabilan dan keterkontrolan sistem dari model matematika ekstraksi lipid kontinu mikroalga *Chlorella Vulgaris* dengan pelarut CXM yang meliputi penyelesaian pada titik setimbang, nilai eigen dan pembuktian *rank* berdasarkan ukuran matriks pada persamaan *state*.

#### **3.3 Melakukan Verifikasi Model**

Pada tahap ini, dilakukan verifikasi model dan menganalisis model matematika ekstraksi lipid kontinu mikroalga *Chlorella Vulgaris* dengan pelarut CXM. Setelah itu, menentukan keadaan awal dan keadaan akhir dalam waktu yang sudah ditentukan.

#### **3.4 Menentukan Penyelesaian Kendali Optimal**

Menentukan masalah kendali optimal dari model matematika ekstraksi lipid kontinu mikroalga *Chlorella Vulgaris* dengan pelarut CXM yang meliputi fungsi objektif atau biaya serta kondisi syarat batas yang harus dipenuhi. Setelah diformulasikan masalah kendali optimal, selanjutnya dilakukan penyelesaian kendali optimal dengan menggunakan metode optimasi LQR dan PMP.

#### **3.5 Simulasi**

Pada tahap ini, dilakukan implementasi pada perangkat lunak yang digunakan.

- (i) Melakukan simulasi pada proses verifikasi model dengan perangkat lunak Flowstar (Chen, etc., 2015).
- (ii) Melakukan simulasi pada proses kendali optimal dengan metode LQR dan metode PMP.

#### **3.6 Analisis Hasil Simulasi**

Pada tahap ini, dilakukan analisis hasil simulasi dan analisa hasil yang diperoleh dengan menggunakan metode LQR dengan metode PMP.

### **3.7 Penarikan Kesimpulan dan Saran**

Penarikan kesimpulan dan pemberian saran terhadap simulasi dan pembahasan yang telah dilakukan sebelumnya serta pemberian saran untuk perbaikan dan pengembangan penelitian selanjutnya.

### **3.8 Penyusunan Tesis**

Pada tahapan ini penulis melakukan penyusunan buku dengan sistematika penulisan yang sudah ditentukan.

### **3.9 Diseminasi Hasil Penelitian**

Dalam tahap ini, dilakukan publikasi dari hasil penelitian yang dilakukan baik melalui seminar internasional ataupun publikasi paper dalam prosiding.

## BAB 4

### PEMBAHASAN

#### 4.1 Persamaan Model Matematika Ekstraksi Lipid Mikroalga

Pada penelitian ini digunakan model matematika ekstraksi lipid mikroalga seperti yang telah dibahas pada bab 2.2 sebagai berikut (Siahaan, 2016):

$$\begin{aligned}
 \frac{dC_s}{dt} &= -\frac{(1-\varepsilon_p)}{\varepsilon} \frac{dC_p}{dt} - \frac{S}{\rho\varepsilon V} C_s \\
 \frac{dC_p}{dt} &= -\frac{k_f a (C_p - C_{sat}^*)}{V(1-\varepsilon_p)} - \frac{dC_l}{dt} \\
 \frac{dC_l}{dt} &= k_a C_p - k_d C_l.
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

Selanjutnya dari model matematika diatas, yang mengandung turunan pindahkan pada ruas sebelah kiri sedangkan yang tidak mengandung turunan pindahkan pada ruas kanan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 \frac{dC_s}{dt} \frac{(1-\varepsilon_p)}{\varepsilon} \frac{dC_p}{dt} &= -\frac{S}{\rho\varepsilon V} C_s \\
 \frac{dC_p}{dt} + \frac{dC_l}{dt} &= -\frac{k_f a (C_p - C_{sat}^*)}{V(1-\varepsilon_p)} \\
 \frac{dC_l}{dt} &= k_a C_p - k_d C_l.
 \end{aligned}$$

Kemudian bentuk dalam sebuah matriks,

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1-\varepsilon_p}{\varepsilon} & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{dC_s}{dt} \\ \frac{dC_p}{dt} \\ \frac{dC_l}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{S}{\rho\varepsilon V} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{k_f a}{V(1-\varepsilon_p)} & 0 \\ 0 & k_a & -k_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_s \\ C_p \\ C_l \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{k_f a C_{sat}^*}{V(1-\varepsilon_p)} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{dC_s}{dt} \\ \frac{dC_p}{dt} \\ \frac{dC_l}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1-\varepsilon_p}{\varepsilon} & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -\frac{S}{\rho\varepsilon V} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{k_f a}{V(1-\varepsilon_p)} & 0 \\ 0 & k_a & -k_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_s \\ C_p \\ C_l \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{k_f a C_{sat}^*}{V(1-\varepsilon_p)} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1-\varepsilon_p}{\varepsilon} & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{dC_s}{dt} \\ \frac{dC_p}{dt} \\ \frac{dC_l}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{S}{\rho\varepsilon V} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{k_f a}{V(1-\varepsilon_p)} & 0 \\ 0 & k_a & -k_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_s \\ C_p \\ C_l \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{k_f a C_{sat}^*}{V(1-\varepsilon_p)} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{dC_s}{dt} \\ \frac{dC_p}{dt} \\ \frac{dC_l}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1-\varepsilon_p}{\varepsilon} & \frac{1-\varepsilon_p}{\varepsilon} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{S}{\rho\varepsilon V} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{k_f a}{V(1-\varepsilon_p)} & 0 \\ 0 & k_a & -k_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_s \\ C_p \\ C_l \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{k_f a C_{sat}^*}{V(1-\varepsilon_p)} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{dC_s}{dt} \\ \frac{dC_p}{dt} \\ \frac{dC_l}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{S}{\rho\varepsilon V} & -\frac{1-\varepsilon_p}{\varepsilon} \left( -\frac{k_f a}{V(1-\varepsilon_p)} - k_a \right) & -\frac{1-\varepsilon_p}{\varepsilon} k_d \\ 0 & -\frac{k_f a}{V(1-\varepsilon_p)} - k_a & k_d \\ 0 & k_a & -k_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_s \\ C_p \\ C_l \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{k_f a C_{sat}^*}{V(1-\varepsilon_p)} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Sehingga diperoleh:

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{S}{\rho\varepsilon V} & -\frac{1-\varepsilon_p}{\varepsilon} \left( -\frac{k_f a}{V(1-\varepsilon_p)} - k_a \right) & -\frac{1-\varepsilon_p}{\varepsilon} k_d \\ 0 & -\frac{k_f a}{V(1-\varepsilon_p)} - k_a & k_d \\ 0 & k_a & -k_d \end{bmatrix}$$

#### 4.2 Analisa Kestabilan

Pada analisa kestabilan ini, dilakukan dengan menggunakan kriteria Routh-Hurwitz dengan syarat-syarat yang telah dibahas pada bab 2.3. Selanjutnya, untuk menentukan akar-akar karakteristik dari matriks  $A$ , berdasarkan persamaan  $|\lambda I - A| = 0$  maka:

$$\begin{bmatrix} \lambda + \frac{S}{\rho\varepsilon V} & \frac{(1-\varepsilon_p)}{\varepsilon} \left( \frac{k_f a}{V(1-\varepsilon_p)} + k_a \right) & -\frac{(1-\varepsilon_p)}{\varepsilon} k_d \\ 0 & \lambda + \left( \frac{k_f a}{V(1-\varepsilon_p)} + k_a \right) & k_d \\ 0 & k_a & \lambda + k_d \end{bmatrix} = 0.$$

Sehingga diperoleh persamaan akar-akar karakteristik sebagai berikut:

$$\begin{aligned} |\lambda I - A| x &= 0 \\ \left( \lambda + \frac{S}{\rho\varepsilon V} \right) \left( \lambda + \left( \frac{k_f a}{V(1-\varepsilon_p)} + k_a \right) \right) (\lambda + k_d) - k_a k_d \left( \lambda + \frac{S}{\rho\varepsilon V} \right) &= 0 \end{aligned}$$

dengan kriteria Routh-Hurwitz, persamaan karakteristik diatas dapat ditulis sebagai berikut,  $a_0\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0$  dengan masing-masing nilai untuk  $a_1, a_2, a_3$  adalah:

$$\begin{aligned} a_0 &= 1 \\ a_1 &= \left( \frac{k_f a}{V(1-\varepsilon_p)} + k_a \right) + \frac{S}{\rho\varepsilon V} + k_d \\ a_2 &= \left( \frac{k_f a}{V(1-\varepsilon_p)} + k_a \right) \frac{S}{\rho\varepsilon V} + k_d \left( \frac{k_f a}{V(1-\varepsilon_p)} + k_a \right) + k_d \frac{S}{\rho\varepsilon V} - k_a k_d \\ a_3 &= k_d \left( \frac{k_f a}{V(1-\varepsilon_p)} + k_a \right) \frac{S}{\rho\varepsilon V} - \frac{S}{\rho\varepsilon V} k_a k_d \end{aligned}$$



Sistem dikatakan stabil jika akar-akar persamaan karakteristik dari matriks  $A$  mempunyai nilai eigen dengan bagian riil negatif jika dan hanya jika  $a_1 > 0, b_1 > 0$  dan  $c_1 > 0$ , dengan menggunakan rumus Routh-Hurwitz dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{array}{c|ccc} \lambda^3 & a_0 & a_2 & a_0 = 0 \\ \lambda^2 & a_1 & a_3 & 0 \\ \lambda^1 & b_1 & b_2 & 0 \\ \lambda^0 & c_1 & 0 & 0 \end{array}$$

Nilai  $a_1, a_2, a_3$  dan dianalisis sebagai berikut. Diberikan nilai parameter yang digunakan dalam proses ekstraksi sebagai berikut:

Parameter	Nilai
$k_a$	$0.000002 \text{ s}^{-1}$
$k_d$	$0.000001 \text{ s}^{-1}$
$k_f$	$1.72737 \text{ m/s}$
$C_{sat}^*$	$9.25$
$S$	$5 \times 10^{-5} \text{ m}^3$
$\varepsilon_P$	$0.3$
$a$	$1.256 \times 10^{-11} \text{ m}^2$
$\rho$	$74.79195 \text{ kg/m}^3$
$V$	$9 \times 10^{-5} \text{ m}^3$

Tabel 4.1: Nilai Parameter Model Ekstraksi Mikroalga *Chlorella vulgaris*

dengan nilai parameter yang diberikan, selanjutnya dicari nilai  $a_0, a_1, a_2, a_3, b_1$ , dan  $c_1$ . Berdasarkan perhitungan dengan menggunakan Matlab didapat:

$$a_0 = 1$$

$$a_1 = 0.0248$$

$$a_2 = 8.2807 \times 10^{-8}$$

$$a_3 = 8.5268 \times 10^{-15}$$

$$b_1 = 8.2807 \times 10^{-8}$$

$$c_1 = 8.526 \times 10^{-15}$$

karena nilai  $a_1 > 0, b_1 > 0$  dan  $c_1 > 0$  maka sistem stabil.

### 4.3 Analisa Keterkontrolan

Matriks keterkontrolan diberikan oleh persamaan,  $M_c = [B|AB|A^2B]$ , dimana syarat sebuah sistem dikatakan terkontrol telah dijelaskan pada bab 2.4. Dimana matriks  $B$  sebagai berikut:

$$B = \begin{bmatrix} \frac{\partial(f_1)}{\partial V} \\ \frac{\partial(f_2)}{\partial V} \\ \frac{\partial(f_3)}{\partial V} \end{bmatrix}$$

dimana  $f_1 = \dot{C}_s$ ,  $f_2 = \dot{C}_p$  dan  $f_3 = \dot{C}_l$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{\partial \left( -\frac{(1-\varepsilon_p)}{\varepsilon} \frac{dC_p}{dt} - \frac{S}{\rho\varepsilon V} C_s \right)}{\frac{\partial V}{\partial (k_a C_p - k_d C_l)}} \\ \frac{\partial \left( -\frac{k_f a (C_p - C_{sat}^*)}{V(1-\varepsilon_p)} - \frac{dC_l}{dt} \right)}{\frac{\partial V}{\partial (k_a C_p - k_d C_l)}} \\ \frac{\partial (k_a C_p - k_d C_l)}{\partial V} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{(1-\varepsilon_p)}{\varepsilon} \left( \frac{k_f a (C_p - C_{sat}^*)}{V^3(1-\varepsilon_p)} \right) + \frac{S}{\rho\varepsilon V^2} C_s \\ \frac{k_f a (C_p - C_{sat}^*)}{V^2(1-\varepsilon_p)} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0.0043 \\ 0.0018 \\ 0 \end{bmatrix}$$

sehingga diperoleh matriks  $AB$ :

$$AB = \begin{bmatrix} 9.5005 \times 10^9 \\ -4.0662 \times 10^9 \\ 3.7498 \times 10^9 \end{bmatrix}$$

dan matriks  $A^2B$  sebagai berikut:

$$A^2B = \begin{bmatrix} -2.9366 \times 10^{-14} \\ 1.2568 \times 10^{-14} \\ -1.1882 \times 10^{-14} \end{bmatrix}.$$

Jadi, setelah dimasukkan nilai parameter kedalam matriks  $M_c$  sehingga diperoleh:

$$M_c = \begin{bmatrix} 0.0043 & 9.5005 \times 10^9 & -2.9366 \times 10^{-14} \\ 0.0018 & -4.0662 \times 10^9 & 1.2568 \times 10^{-14} \\ 0 & 3.7498 \times 10^9 & -1.1882 \times 10^{-14} \end{bmatrix}$$

dengan melakukan operasi baris elementer (OBE) didapatkan rank matriks  $M_c$  sama dengan dimensinya yaitu 3. Berdasarkan teorema keterkontrolan, maka sistem diatas adalah sistem yang terkontrol.

#### 4.4 Analisa Keteramatan

Analisa keteramatan dapat dilakukan dengan membentuk matriks keteramatan, yaitu:

$$M_p = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix}.$$

Dimana matriks  $C$  adalah sistem yang akan diketahui hasilnya. Karena mengasumsikan nilai keluaran berupa variable  $C_s$ ,  $C_p$  dan  $C_l$  maka diperoleh matriks  $C$  sebagai berikut:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Menentukan matriks  $CA$ :

$$CA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1.026 \times 10^{-11} & 5.0671 \times 10^{-6} & -2.3364 \times 10^{-6} \\ 0 & -2.1687 \times 10^{-6} & 1.0000 \times 10^{-6} \\ 0 & 2.0000 \times 10^{-6} & -1.0000 \times 10^{-6} \end{bmatrix}$$

$$CA = \begin{bmatrix} -1.8026 \times 10^{-11} & 5.0671 \times 10^{-6} & -2.3364 \times 10^{-6} \\ 0 & -2.1687 \times 10^{-6} & 1.0000 \times 10^{-6} \\ 0 & 2.0000 \times 10^{-6} & -1.0000 \times 10^{-6} \end{bmatrix}$$

Untuk menentukan matriks  $CA^2$ , diperlukan matriks  $A^2$  terlebih dahulu yaitu:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 3.2493 \times 10^{-22} & -1.5662 \times 10^{-11} & 7.4036 \times 10^{-12} \\ 0 & 6.7034 \times 10^{-12} & -3.1687 \times 10^{-12} \\ 0 & -6.3374 \times 10^{-12} & 3.0000 \times 10^{-12} \end{bmatrix}$$

Sehingga diperoleh:

$$CA^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3.2493 \times 10^{-22} & -1.5662 \times 10^{-11} & 7.4036 \times 10^{-12} \\ 0 & 6.7034 \times 10^{-12} & -3.1687 \times 10^{-12} \\ 0 & -6.3374 \times 10^{-12} & 3.0000 \times 10^{-12} \end{bmatrix}$$

$$CA^2 = \begin{bmatrix} 3.2493 \times 10^{-22} & -1.5662 \times 10^{-11} & 7.4036 \times 10^{-12} \\ 0 & 6.7034 \times 10^{-12} & -3.1687 \times 10^{-12} \\ 0 & -6.3374 \times 10^{-12} & 3.0000 \times 10^{-12} \end{bmatrix}$$

Setelah itu dimasukkan nilai parameter kedalam matriks  $M_p$  sehingga dapat dibentuk sebagai berikut:

$$M_p = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1.8026 \times 10^{-11} & 5.0671 \times 10^{-6} & -2.3364 \times 10^{-6} \\ 0 & -2.1687 \times 10^{-6} & 1.0000 \times 10^{-6} \\ 0 & 2.0000 \times 10^{-6} & -1.0000 \times 10^{-6} \\ 3.2493 \times 10^{-22} & -1.5662 \times 10^{-11} & 7.4036 \times 10^{-12} \\ 0 & 6.7034 \times 10^{-12} & -3.1687 \times 10^{-12} \\ 0 & -6.3374 \times 10^{-12} & 3.0000 \times 10^{-12} \end{bmatrix}$$

dengan menerapkan operasi baris elementer (OBE) didapat rank  $M_p = 3$ . Berdasarkan teorema keteramatan, maka sistem teramat.

#### 4.5 Verifikasi Model

Pada bagian ini dibahas mengenai *model checking* pada model produksi lipid pada mikroalga dengan Persamaan 2.4. Tujuan menggunakan metode *model checking* adalah untuk melakukan pengecekan pada himpunan yang berada di kondisi awal pada variabel *state* dengan menggunakan sebuah spesifikasi yang diinginkan untuk mengetahui keadaan model sistem bersifat *safe* atau *unsafe*. Penyelesaian *model checking* dilakukan dengan menggunakan deret Taylor, dengan nilai parameter berdasarkan penelitian sebelumnya pada Tabel 4.1 dan diberikan kondisi awal dan kondisi batas sebagai berikut :

$$\begin{array}{ll} C_s(t_0) = 0.5 & C_s(t_f) = 7.5 \\ C_p(t_0) = 0.3 & C_p(t_f) = 9.1 \\ C_l(t_0) = 0.1 & C_l(t_f) = 0.2 \end{array}$$

Untuk mengetahui nilai spesifikasi dari nilai awal pada setiap variabel *state*, berikut akan diberikan nilai dari variabel *state* dengan  $C_{ss} = 0.49$ ,  $C_{ps} = 0.29$ , dan  $C_{ls} = 0.09$ . Tujuan dari pemberian spesifikasi tersebut adalah untuk mengetahui sistem pada persamaan 2.4 dapat bersifat *safe* atau *unsafe*. Sistem dinamik dikatakan *safe* jika

$$\begin{array}{l} C_{ss} \geq 0.49 \\ C_{ps} \geq 0.29 \\ C_{ls} \geq 0.09 \end{array}$$

Selanjutnya, sistem dinamik dikatakan *unsafe* jika

$$\begin{array}{l} C_{ss} \leq 0.49 \\ C_{ps} \leq 0.29 \\ C_{ls} \leq 0.09 \end{array}$$

Akan diberikan hasil dari simulasi *model checking* sebagai berikut

- a. Simulasi Model Checking pada Konsentrasi Lipid dalam Aliran Pelarut  
Berdasarkan hasil simulasi dapat disimpulkan bahwa  $C_s \geq C_{ss}$ . Maka, sistem pada variabel konsentrasi lipid dalam aliran pelarut bersifat *safe*. Berikut hasil *safety* sistem dinamik pada konsentrasi lipid dalam aliran pelarut dengan *running time*

```
Result of the safety verification on the computed flowpipes: SAFE
Total time cost: 15.047000 seconds.
```

Gambar 4.1: Safety Sistem pada Konsentrasi Lipid dalam Aliran Pelarut

- b. Simulasi Model Checking pada Konsentrasi Lipid dalam Partikel Mikroalga  
Berdasarkan hasil simulasi dapat disimpulkan bahwa  $C_p \geq C_{ps}$ . Maka, sistem pada variabel konsentrasi lipid dalam partikel mikroalga bersifat *safe*. Berikut hasil *safety* sistem dinamik pada konsentrasi lipid dalam partikel mikroalga dengan *running time*

```
Result of the safety verification on the computed flowpipes: SAFE
Total time cost: 15.592000 seconds.
```

Gambar 4.2: Safety Sistem pada Konsentrasi Lipid dalam Partikel Mikroalga

- c. Simulasi Model Checking pada Konsentrasi Lipid dipermukaan Partikel  
Berdasarkan hasil simulasi dapat disimpulkan bahwa  $C_l \geq C_{ls}$ . Maka, sistem pada variabel konsentrasi lipid dipermukaan partikel bersifat *safe*. Berikut hasil *safety* sistem dinamik pada konsentrasi lipid dipermukaan partikel dengan *running time*

```
Result of the safety verification on the computed flowpipes: SAFE
Total time cost: 14.796000 seconds.
```

Gambar 4.3: Safety Sistem pada Konsentrasi Lipid dipermukaan Partikel

#### 4.6 Penyelesaian Kendali Optimal dengan Metode PMP

Pada penelitian ini tujuan dari penyelesaian kendali optimal adalah untuk mengoptimalkan konsentrasi lipid dalam partikel mikroalga dengan mengontrol volume. Dari Persamaan (2.4), akan dicari kendali optimalnya menggunakan prinsip maksimum pontryagin. Adapun langkah-langkahnya yaitu :

1. Membentuk fungsi tujuan

Sesuai dengan tujuan dari penelitian ini yaitu memaksimalkan konsentrasi lipid dalam aliran pelarut ( $C_s$ ) dan partikel mikroalga ( $C_p$ ) dengan meminimalkan volume pelarut ( $v$ ) yang dimasukkan. Dari permasalahan ini maka fungsi tujuannya sebagai berikut :

$$J(V) = \int_{t_0}^{t_f} (C_s(t) + C_p(t) - \frac{Q}{2}V^2(t))dt \quad (4.2)$$

2. Langkah-langkah penyelesaian

- Bentuk fungsi Hamilton

$$H(C_s, C_p, C_l, V, \lambda) = C_s(t) + C_p(t) - \frac{Q}{2}V^2(t) + \sum_{i=1}^3 \lambda_i f_i \quad (4.3)$$

dimana  $i = 1, 2, 3$  dan  $f_1 = \dot{C}_s$ ,  $f_2 = \dot{C}_p$ , dan  $f_3 = \dot{C}_l$

$$\begin{aligned} H = & C_s(t) + C_p(t) - \frac{Q}{2}V^2(t) + \lambda_1 \left( \frac{-(1 - \varepsilon_p)}{\varepsilon} \left( \frac{-k_f a(C_p - C_s a t^*)}{V(1 - \varepsilon_p)} - \right. \right. \\ & \left. \left. k_a C_p + k_d C_l \right) \right) - \lambda_1 C_s \frac{S}{\rho \varepsilon V} + \lambda_2 k_d C_l - \lambda_2 k_a C_p - \\ & \lambda_2 \frac{-k_f a(C_p - C_s a t^*)}{V(1 - \varepsilon_p)} + \lambda_3 k_a C_p - \lambda_3 k_d C_l \end{aligned}$$

- Memaksimumkan H terhadap vektor kendali v(t)

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial H}{\partial V} \\ 0 &= -QV(t) + \lambda_1 \frac{-k_f a(C_p - C_s a t^*)}{\varepsilon V^2} - \lambda_1 C_s \frac{S}{\rho \varepsilon V^2} - \\ & \quad \lambda_2 \frac{-k_f a(C_p - C_s a t^*)}{V^2(1 - \varepsilon_p)} \\ QV^3(t) &= \lambda_1 \frac{-k_f a(C_p - C_s a t^*)}{\varepsilon} - \lambda_1 C_s \frac{S}{\rho \varepsilon} - \lambda_2 \frac{-k_f a(C_p - C_s a t^*)}{(1 - \varepsilon_p)} \\ V(t) &= \left( \frac{\lambda_1 \frac{-k_f a(C_p - C_s a t^*)}{\varepsilon} - \lambda_1 C_s \frac{S}{\rho \varepsilon} - \lambda_2 \frac{-k_f a(C_p - C_s a t^*)}{(1 - \varepsilon_p)}}{Q} \right)^{\frac{1}{3}} \end{aligned}$$

Sesuai dengan penulisan (Siahaan, 2016), nilai batas volume pelarut adalah  $0 < v \leq 9 \times 10^5$ , sehingga kendali optimal  $v(t)$  dapat dituliskan menjadi

$$v(t) = \min(9 \times 10^5, \max(0, v))$$

- Menentukan  $H^*$  yang optimal

$$\begin{aligned}
H^* = & C_s(t) + C_p(t) - \frac{Q}{2} \min(9 \times 10^{-5}, \max(0, v))^2(t) + \lambda_1 \left( \frac{-(1 - \varepsilon_p)}{\varepsilon} \right. \\
& \left( \frac{-k_f a(C_p - C_s a t^*)}{\min(9 \times 10^{-5}, \max(0, v))(1 - \varepsilon_p)} - k_a C_p + k_d C_l \right) \Bigg) - \lambda_1 C_s \\
& \frac{S}{\rho \varepsilon \min(9 \times 10^{-5}, \max(0, v))} + \lambda_2 k_d C_l - \lambda_2 k_a C_p - \\
& \lambda_2 \frac{-k_f a(C_p - C_s a t^*)}{\min(9 \times 10^{-5}, \max(0, v))(1 - \varepsilon_p)} + \lambda_3 k_a C_p - \lambda_3 k_d C_l
\end{aligned}$$

- Menyelesaikan persamaan state dan costate untuk memperoleh sistem yang optimal

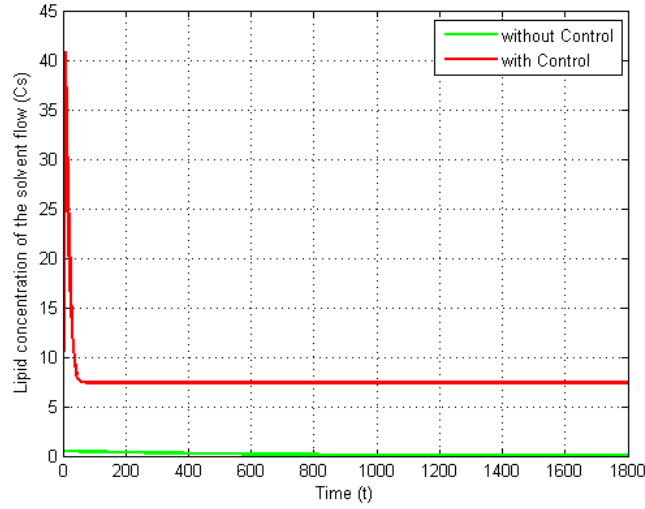
Persamaan state:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial H^*}{\partial \lambda_1} &= \left( \frac{-(1 - \varepsilon_p)}{\varepsilon} \left( \frac{-k_f a(C_p - C_s a t^*)}{\min(9 \times 10^{-5}, \max(0, v))(1 - \varepsilon_p)} - k_a C_p + k_d C_l \right) \right) - \\
& C_s \frac{S}{\rho \varepsilon \min(9 \times 10^{-5}, \max(0, v))} \\
\frac{\partial H^*}{\partial \lambda_2} &= k_d C_l - k_a C_p - \frac{-k_f a(C_p - C_s a t^*)}{\min(9 \times 10^{-5}, \max(0, v))(1 - \varepsilon_p)} \\
\frac{\partial H^*}{\partial \lambda_3} &= k_a C_p - k_d C_l
\end{aligned}$$

Persamaan costate:

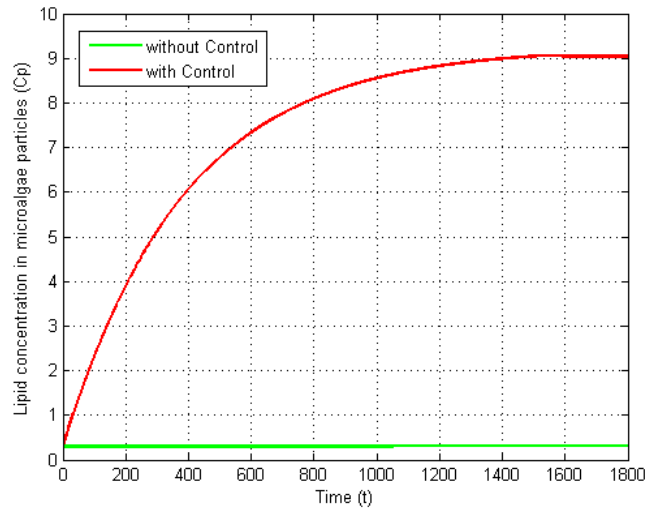
$$\begin{aligned}
\frac{\partial \lambda_1}{\partial t} &= -\frac{\partial H^*}{\partial C_s} \\
&= -\left( 1 - \lambda_1 \frac{S}{\rho \varepsilon \min(9 \times 10^{-5}, \max(0, v))} \right) \\
\frac{\partial \lambda_2}{\partial t} &= -\frac{\partial H^*}{\partial C_p} \\
&= -\left( 1 - \lambda_2 k_a - \lambda_2 \frac{k_f a}{\min(9 \times 10^{-5}, \max(0, v))(1 - \varepsilon_p)} + \right. \\
& \left. \lambda_1 \left( -\frac{(1 - \varepsilon_p)}{\varepsilon} \left( \frac{-k_f a}{\min(9 \times 10^{-5}, \max(0, v))(1 - \varepsilon_p)} - k_a \right) \right) + \lambda_3 k_a \right) \\
\frac{\partial \lambda_3}{\partial t} &= -\frac{\partial H^*}{\partial C_l} \\
&= -\left( \lambda_1 \left( -\frac{(1 - \varepsilon_p)}{\varepsilon} k_d \right) + \lambda_2 k_d - \lambda_3 k_d \right)
\end{aligned}$$

Setelah menyelesaikan langkah-langkah diatas, selanjutnya dilakukan simulasi menggunakan Matlab sebagai berikut:



Gambar 4.4: Konsentrasi lipid dalam aliran pelarut ( $C_s$ )

Gambar 4.4 menunjukkan sebelum dilakukan kontrol optimal pada  $t = 1800$  nilai konsentrasi lipid dalam aliran pelarut ( $C_s$ ) menuju  $0 \text{ kg/m}^3$ , kemudian setelah kontrol pada  $t = 1800$  meningkat menjadi  $7.4138 \text{ kg/m}^3$ . Ini menunjukkan bahwa setelah adanya kontrol optimal dapat meningkatkan konsentrasi lipid dalam aliran pelarut.

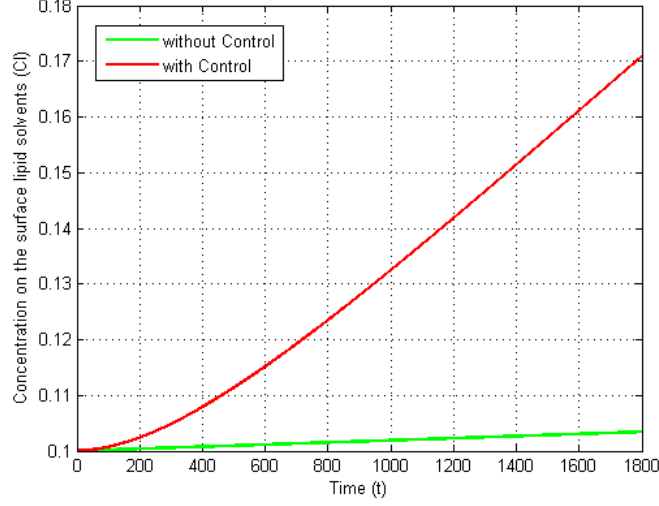


Gambar 4.5: Konsentrasi lipid dalam partikel mikroalga ( $C_p$ )

Pada Gambar 4.5 kondisi awal nilai konsentrasi lipid dalam partikel mikroalga ( $C_p$ ) adalah  $0.3046 \text{ kg/m}^3$  saat  $t = 1800$ . Kemudian setelah diberikan kontrol optimal nilai konsentrasi lipid dalam partikel mikroalga ( $C_p$ ) meningkat menjadi  $9.0401 \text{ kg/m}^3$ . Ini menunjukkan bahwa setelah diberikan kontrol optimal terhadap konsentrasi lipid pada partikel mikroalga memiliki perbedaan



yang cukup signifikan.



Gambar 4.6: Konsentrasi lipid di permukaan partikel ( $C_l$ )

Gambar 4.6 menunjukkan bahwa setelah kontrol optimal meningkat. Sebelum diberikan kontrol nilai konsentrasi lipid di permukaan partikel ( $C_l$ ) sebesar  $0.1009 \text{ kg/m}^3$ , kemudian setelah kontrol menjadi  $0.1709 \text{ kg/m}^3$ . Ini menunjukkan bahwa setelah kontrol optimal dapat mempengaruhi konsentrasi lipid di permukaan partikel.

#### 4.7 Penyelesaian Kendali Optimal dengan Metode LQR

Pada sub bab ini, dibahas perancangan kendali LQR untuk sistem model matematika ekstraksi lipid mikroalga. LQR merupakan sebuah sistem kendali yang terdiri atas sistem dan gain feedback sistem. Dengan menentukan fungsi objektif sebagai berikut:

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} (x^T Q_c x + u^T R_c u) dt$$

LQR yang telah dijabarkan adalah desain untuk sistem kendali dengan rentang waktu yang tak terhingga dimana  $t_f$  adalah waktu final kendali serta  $Q_c$  adalah matriks simetris, semi-definit positif dan  $R_c$  adalah matriks simetris, definit positif. Dengan  $x$  sebagai berikut:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_s \\ C_p \\ C_l \end{bmatrix}$$

dan  $u = [V]$ .

Tahap selanjutnya adalah penentuan gain feedback regulator. Kemudian

diselidiki Gain Regulator LQR dengan karakteristik stabil pada lup tertutup. Hukum kendali dari sebuah sistem dapat dituliskan sebagai berikut:

$$u_c = -K_c x$$

dengan  $K_c$  adalah nilai gain feedback regulator yang diperoleh dari:

$$K_c = R_c^{-1} B^T P_c$$

dengan  $P_c$  merupakan penyelesaian Aljabar Riccati:

$$A^T P_c + P_c A - P_c B R_c^{-1} B^T P_c + Q_c = 0$$

Pada penyelesaian Aljabar Riccati di atas, dibutuhkan nilai  $Q_c$  dan  $R_c$  terlebih dahulu.  $Q_c$  merupakan matriks bobot variable sistem yang bersifat simetri dan semi definit positif.  $R_c$  merupakan matriks bobot nilai masukan sistem yang bersifat simetri dan definit positif. Nilai  $Q_c$  dan  $R_c$  diperoleh dengan cara trial and error. Semakin kecil nilai  $R_c$  dan semakin besar nilai  $Q_c$ , maka nilai gain  $K_c$  semakin besar.

Berikut adalah tahap-tahap yang dilakukan dalam penentuan gain  $K_c$ :

1. Menentukan nilai  $R_c$  dan  $Q_c$ .
2. Mencari nilai  $P_c$  dengan toolbox MATLAB.
3. Mencari nilai gain  $K_c$ .
4. Simulasi sistem dengan simulink MATLAB.
5. Analisa karakteristik hingga diperoleh sistem yang optimal, yaitu waktu stabil tercepat dan hasil yang maksimal.

Dari beberapa penelitian yang menggunakan metode LQR pada umumnya untuk menentukan nilai  $Q_c$  dan  $R_c$  dengan cara trial and error, diperoleh nilai  $Q_c$  dan  $R_c$  yang membuat sistem yang optimal adalah sebagai berikut:

$$Q_c = \begin{bmatrix} 0.001 & 0 & 0 \\ 0 & 0.001 & 0 \\ 0 & 0 & 0.001 \end{bmatrix}$$

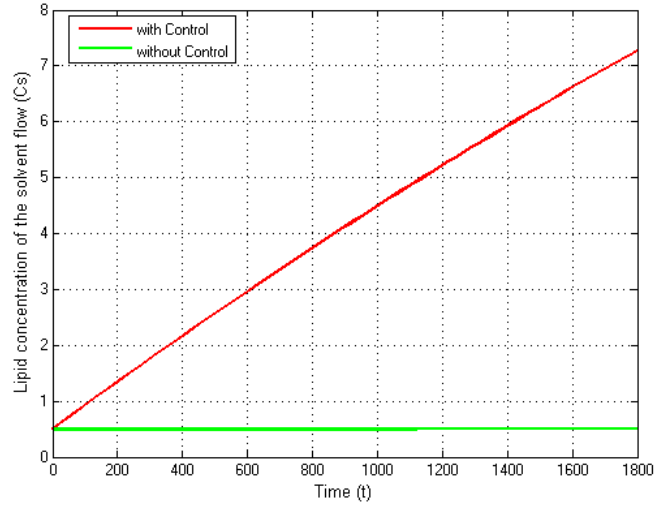
dan  $R_c = [1]$ , dengan algoritma aljabar Riccati menggunakan bantuan matlab maka diperoleh:

$$P_c = \begin{bmatrix} 0.2757 \times 10^3 & -0.6264 \times 10^3 & -1.2592 \times 10^3 \\ -0.6264 \times 10^3 & 1.4655 \times 10^3 & 2.9379 \times 10^3 \\ -1.2592 \times 10^3 & 2.9379 \times 10^3 & 6.3760 \times 10^3 \end{bmatrix}.$$

Sehingga nilai gain regulator adalah:

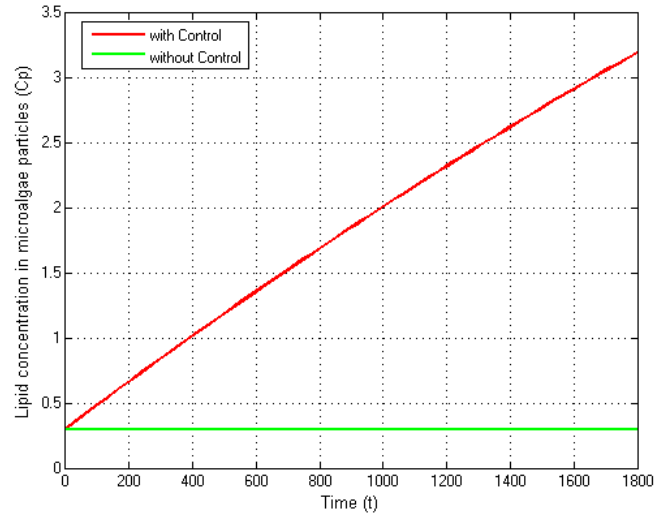
$$K_c = [0.0316 \quad 0.0074 \quad -0.0003]$$

Berikut ini merupakan hasil simulasi menggunakan Matlab.



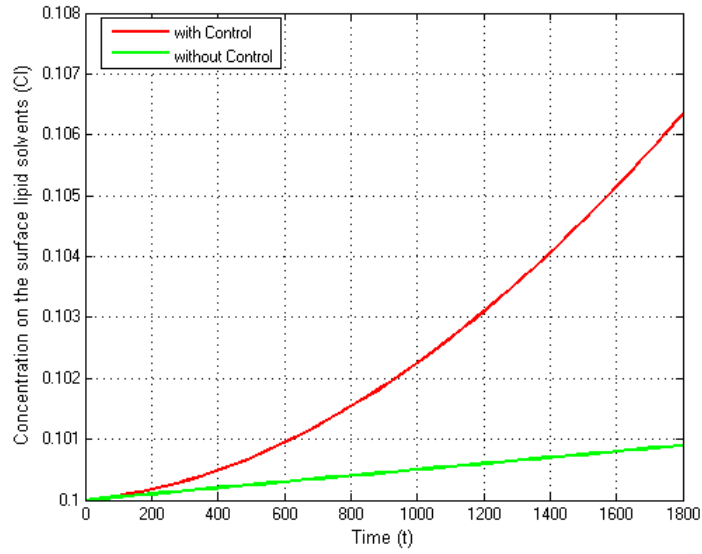
Gambar 4.7: Konsentrasi lipid dalam aliran pelarut ( $C_s$ )

Gambar 4.7 menunjukkan sebelum dilakukan kontrol pada konsentrasi lipid dalam aliran pelarut ( $C_s$ ) saat  $t = 1800$  adalah sebesar  $0.502 \text{ kg/m}^3$ , setelah dilakukan kontrol nilainya meningkat menjadi  $7.2785 \text{ kg/m}^3$ . Hal ini menunjukkan bahwa setelah dilakukan kontrol optimal dapat mempengaruhi nilai konsentrasi lipid dalam aliran pelarut ( $C_s$ ).



Gambar 4.8: Konsentrasi lipid dalam partikel mikroalga ( $C_p$ )

Pada Gambar 4.8 dapat dilihat bahwa nilai konsentrasi lipid di dalam partikel mikroalga ( $C_p$ ) sebelum diberikan kontrol optimal adalah  $0.299 \text{ kg/m}^3$  dan setelah diberikan kontrol optimal nilai konsentrasi lipid dalam partikel mikroalga ( $C_p$ ) meningkat menjadi  $3.1913 \text{ kg/m}^3$ .



Gambar 4.9: Konsentrasi lipid di permukaan partikel ( $C_l$ )

Gambar 4.9 menunjukkan sebelum dan setelah adanya kendali optimal sistem mengalami peningkatan yang relatif kecil, pada kondisi awal saat  $t = 1800$  nilai yang ditunjukkan adalah  $0.1009 \text{ kg/m}^3$  sedangkan setelah dilakukan kontrol nilai konsentrasi lipid di permukaan partikel ( $C_l$ ) menjadi  $0.1063 \text{ kg/m}^3$ .

## BAB 5

### KESIMPULAN DAN SARAN

Pada bab ini, diberikan kesimpulan yang diperoleh dari Tesis beserta saran untuk penelitian selanjutnya.

#### 5.1 Kesimpulan

1. Penggunaan verifikasi model pada sistem model matematika ekstraksi lipid mikroalga dengan kondisi awal dan kondisi batas yang sudah diberikan, dan dengan spesifikasi nilai variabel, didapat bahwa ketiga variabel  $C_s$ ,  $C_p$ , dan  $C_l$  bersifat *safe*.
2. Metode LQR pada model matematika ekstraksi lipid mikroalga didapatkan nilai

$$Q_c = \begin{bmatrix} 0.001 & 0 & 0 \\ 0 & 0.001 & 0 \\ 0 & 0 & 0.001 \end{bmatrix}$$

dan  $R_c = [1]$ . Pada metode PMP, dengan fungsi tujuan pada persamaan (4.2), didapat kendali optimal  $V(t)$  yaitu

$$v(t) = \min(9 \times 10^{-5}, \max(0, v))$$

3. Dengan menggunakan metode LQR, pada saat  $t = 1800s$  didapat bahwa, sebelum dilakukan kontrol pada konsentrasi lipid dalam aliran pelarut ( $C_s$ ) adalah sebesar  $0.502 \text{ kg/m}^3$ , setelah dilakukan kontrol nilainya meningkat menjadi  $7.2785 \text{ kg/m}^3$ . Untuk nilai konsentrasi lipid di dalam partikel mikroalga ( $C_p$ ) sebelum diberikan kontrol optimal adalah  $0.299 \text{ kg/m}^3$  dan setelah diberikan kontrol optimal nilai konsentrasi lipid dalam partikel mikroalga ( $C_p$ ) meningkat menjadi  $3.1913 \text{ kg/m}^3$ . Selanjutnya untuk nilai konsentrasi lipid di permukaan partikel ( $C_l$ ) sebelum dilakukan kontrol adalah  $0.1009 \text{ kg/m}^3$  sedangkan setelah dilakukan kontrol menjadi  $0.1063 \text{ kg/m}^3$ . Untuk metode PMP pada saat  $t$  yang sama yaitu  $t = 1800s$  didapat bahwa, sebelum dilakukan kontrol nilai konsentrasi lipid dalam aliran pelarut ( $C_s$ ) menuju  $0 \text{ kg/m}^3$ , kemudian meningkat menjadi  $7.4138 \text{ kg/m}^3$ . Selanjutnya, kondisi awal nilai konsentrasi lipid dalam partikel mikroalga ( $C_p$ ) adalah  $0.3046 \text{ kg/m}^3$  kemudian setelah diberikan kontrol optimal nilai konsentrasi lipid dalam partikel mikroalga ( $C_p$ ) meningkat menjadi  $9.0401 \text{ kg/m}^3$  dan untuk nilai konsentrasi lipid di permukaan partikel ( $C_l$ ) sebelum dilakukan kontrol sebesar  $0.1009 \text{ kg/m}^3$ , kemudian setelah kontrol menjadi  $0.1709 \text{ kg/m}^3$ .

Sehingga dari kedua metode yang digunakan pada sistem, didapat bahwa dengan metode PMP menunjukkan hasil yang diperoleh lebih optimal dibandingkan hasil yang diperoleh dengan menggunakan metode LQR.

## **5.2 Saran**

Pada tesis ini dilakukan kontrol optimal dengan menggunakan metode LQR dan PMP, untuk selanjutnya hal yang dapat dikembangkan adalah dengan menggunakan metode kontrol optimal yang lain.

## DAFTAR PUSTAKA

- Baier, C. dan Katoen J.P., (2008), *Principles of Model Checking*, The MIT Press, Cambridge Massachusetts, London, UK.
- Chen, X. Flow\* (Version 2.0). A Verification Tool For Cyber-Physical Systems. <https://flowstar.org/>. Diakses pada 17 Februari 2018.
- Chen X, Sankaranarayanan S, and Abraham E., (2015), *Under-approximate Flowpipes for Non-linear Continuous Systems*, ISBN: 978-0-9835678-4-4. Copyright owned jointly by the authors and FMCAD Inc.
- Dyah P, Shintawati, (2011), *Produksi Biodiesel dari Mikroalga Chlorella Sp dengan Metode Esterifikasi*. Universitas Diponegoro
- Hajar, dan Mardijah, (2015), *Kendali Karbon Dioksida Pada Model Pertumbuhan Alga*, Tesis, Departemen Matematika FMIPA Institut Teknologi Sepuluh Nopember, Surabaya.
- Halim, R., Danquah M.K., dan Webley P.A., (2012), *Extraction of Oil from Microalgae for Biodiesel Production: A Review*. Biotechnology Advances. 30:709-732.
- Mardijah, Jamil A., Hanafi L., dan Sanjaya, S., (2017), *Optimal Control of Algae Growth by Controlling CO<sub>2</sub> and Nutrition Flow using Pontryagin Maximum Principle*, *International Conference on Applied Industrial Mathematics and Statistics* IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series 890.
- Naidu D.S., (2002), *Optimal Control System*, CRC Press, New York.
- Oktavianti N.D., (2016), *Kendali Optimal Pertumbuhan Mikroalga Melalui Tingkat Pengenceran Nutrisi*. Institut Teknologi Sepuluh Nopember. Surabaya.
- Loic B., Emmanuel T., (2015), *Pontryagin Maximum Principle for Optimal Sampled-Data Control Problems*. The 16th IFAC Workshop on Control Applications of Optimization (CAO'2015). Germany.
- Siahaan, S.M., (2016). *Pemodelan Perpindahan Massa Pada Ekstraksi Lipid Kontinu Mikroalga Chlorella Vulgaris Dengan Pelarut C<sub>6</sub>m (CO<sub>2</sub>-Expanded Methanol)*. FMIPA Institut Teknologi Sepuluh Nopember. Indonesia.
- Subiono, (2013), *Sistem Linear dan Kontrol Optimal*, Jurusan Matematika FMIPA-ITS, Surabaya.

- Subiono, (2003), *Matematika Sistem*. Surabaya : Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya.
- Sugiyono A., Anindhita, M. Sidik B., dan Adiarso., (2014), Outlook Energi Indonesia 2014. Jakarta: Badan Pengkajian dan Penerapan Teknologi, Pusat Teknologi Pengembangan Sumberdaya Energi.
- Yi-Hung Y., Klinthong W., dan Tan C.S., (2015), *Optimization of Continuous Lipid Extraction from Chlorella vulgaris by CO<sub>2</sub>-Expanded Methanol for Biodiesel Production*. Bioresource Advanced. 30:709-732.
- Yosta R, Elfera., (2015), *Ekstraksi Minyak Alga dari Spirulina Sp.* Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya.



## Lampiran A

**Lampiran 1** *Source code* Simulasi Model Ekstraksi Lipid Mikroalga dengan Metode PMP.

```
function[v,cs,cp,cl,cs1,cp1,cl1,lambda1,lambda2,lambda3,J]=  
nyicil_TA(Q,s,rho,e,v0,ep,kf,a,ka,kd,cs0,cp0,cl0,csat,tf,t0,n)  
  
tol      = 0.01;  
err1     = tol+1;  
h        = 0.48;  
  
cs=zeros(1,n+1);  
cp=zeros(1,n+1);  
cl=zeros(1,n+1);  
  
cs1=zeros(1,n+1);  
cp1=zeros(1,n+1);  
cl1=zeros(1,n+1);  
  
lambda1=zeros(1,n+1);lambda1(n+1)=0;  
lambda2=zeros(1,n+1);lambda2(n+1)=0;  
lambda3=zeros(1,n+1);lambda3(n+1)=0;  
  
v=zeros(1,n+1)+0.0000005;  
  
cs(1)=cs0;  
cp(1)=cp0;  
cl(1)=cl0;  
cs1(1)=cs0;  
cp1(1)=cp0;  
cl1(1)=cl0;  
  
while(err1>tol)  
oldv=v;  
  
%sistem awal  
for i=1:n  
  
k1cs=h*(-((1-ep)/e)*(-(kf*a*(cp(i)-csat)/(v0*(1-ep)))-ka*cp(i)+  
kd*cl(i))-(s/(rho*e*v0)*cs(i)));  
k1cp=h*(-(kf*a*(cp(i)-csat)/(v0*(1-ep)))-ka*cp(i)+kd*cl(i));  
k1cl=h*(ka*cp(i)+kd*cl(i));  
  
k2cs=h*(-((1-ep)/e)*(-(kf*a*((cp(i)+k1cp/2)-csat)/(v0*(1-ep)))-  
ka*(cp(i)+k1cp/2)+kd*(cl(i)+k1cl/2))-(s/(rho*e*v0)*(cs(i)+k1cs/2))));
```

```

k2cp=h*(-(kf*a*((cp(i)+k1cp/2)-csat)/(v0*(1-ep)))-ka*(cp(i)+k1cp/2)+
kd*(cl(i)+k1cl/2));
k2cl=h*(ka*(cp(i)+k1cp/2)+kd*(cl(i)+k1cl/2));

k3cs=h*(-((1-ep)/e)*(-(kf*a*((cp(i)+k2cp/2)-csat)/(v0*(1-ep)))-
ka*(cp(i)+k2cp/2)+kd*(cl(i)+k2cl/2))-(s/(rho*e*v0)*(cs(i)+k2cs/2)));
k3cp=h*(-(kf*a*((cp(i)+k2cp/2)-csat)/(v0*(1-ep)))-ka*(cp(i)+k2cp/2)+
kd*(cl(i)+k2cl/2));
k3cl=h*(ka*(cp(i)+k2cp/2)+kd*(cl(i)+k2cl/2));

k4cs=h*(-((1-ep)/e)*(-(kf*a*((cp(i)+k3cp)-csat)/(v0*(1-ep)))-
ka*(cp(i)+k3cp)+kd*(cl(i)+k3cl))-(s/(rho*e*v0)*(cs(i)+k3cs)));
k4cp=h*(-(kf*a*((cp(i)+k3cp)-csat)/(v0*(1-ep)))-
ka*(cp(i)+k3cp)+kd*(cl(i)+k3cl));
k4cl=h*(ka*(cp(i)+k3cp)+kd*(cl(i)+k3cl));

cs(i+1)=cs(i)+(k1cs+2*k2cs+2*k3cs+k4cs)/6;
cp(i+1)=cp(i)+(k1cp+2*k2cp+2*k3cp+k4cp)/6;
cl(i+1)=cl(i)+(k1cl+2*k2cl+2*k3cl+k4cl)/6;

end

%persamaan state_____
for i=1:n

sk1cs=h*(-((1-ep)/e)*(-(kf*a*(cp1(i)-csat)/(v(i)*(1-ep)))-ka*cp1(i)+
kd*cl1(i))-(s/(rho*e*v(i))*cs1(i)));
sk1cp=h*(-(kf*a*(cp1(i)-csat)/(v(i)*(1-ep)))-ka*cp1(i)+kd*cl1(i));
sk1cl=h*(ka*cp1(i)+kd*cl1(i));

sk2cs=h*(-((1-ep)/e)*(-(kf*a*((cp1(i)+sk1cp/2)-csat)/(v(i))*(1-ep)))-
ka*(cp1(i)+sk1cp/2)+kd*(cl1(i)+sk1cl/2))-(s/(rho*e*(v(i))*(cs1(i)+
sk1cs/2)));
sk2cp=h*(-(kf*a*((cp1(i)+sk1cp/2)-csat)/((v(i))*(1-ep)))-ka*(cp1(i)+
sk1cp/2)+kd*(cl1(i)+sk1cl/2));
sk2cl=h*(ka*(cp1(i)+sk1cp/2)+kd*(cl1(i)+sk1cl/2));

sk3cs=h*(-((1-ep)/e)*(-(kf*a*((cp1(i)+sk2cp/2)-csat)/(v(i))*(1-ep)))-
ka*(cp1(i)+sk2cp/2)+kd*(cl1(i)+sk2cl/2))-(s/(rho*e*(v(i))*(cs1(i)+
sk2cs/2)));
sk3cp=h*(-(kf*a*((cp1(i)+sk2cp/2)-csat)/((v(i))*(1-ep)))-ka*(cp1(i)+
sk2cp/2)+kd*(cl1(i)+sk2cl/2));
sk3cl=h*(ka*(cp1(i)+sk2cp/2)+kd*(cl1(i)+sk2cl/2));

sk4cs=h*(-((1-ep)/e)*(-(kf*a*((cp1(i)+sk3cp)-csat)/(v(i))*(1-ep)))-

```

```

ka*(cp1(i)+sk3cp)+kd*(cl1(i)+sk3cl))-(s/(rho*e*(v(i))*(cs1(i)+
sk3cs)));
sk4cp=h*(-(kf*a*((cp1(i)+sk3cp)-csat)/((v(i))*(1-ep)))-
ka*(cp1(i)+sk3cp)+kd*(cl1(i)+sk3cl));
sk4cl=h*(ka*(cp1(i)+sk3cp)+kd*(cl1(i)+sk3cl));

cs1(i+1)=cs1(i)+(sk1cs+2*sk2cs+2*sk3cs+sk4cs)/6;
cp1(i+1)=cp1(i)+(sk1cp+2*sk2cp+2*sk3cp+sk4cp)/6;
cl1(i+1)=cl1(i)+(sk1cl+2*sk2cl+2*sk3cl+sk4cl)/6;

end

%persamaan costate_____
for i=1:n
j=(n+1)-i;

ck1cs=h*(1+lambda1(j+1)*(s/(rho*e*(v(i)))));
ck1cp=h*(-(1+lambda1(j+1)*(-(1-ep)/e)*(-(kf*a)/v(i)*(1-ep))-ka))+
lambda2(j+1)*(((kf*a)/v(i)*(1-ep))-ka)+lambda3(j+1)*ka);
ck1cl=h*((lambda1(j+1)*(-(1-ep)/e)*kd))+lambda2(j+1)*kd-lambda3
(j+1)*kd);

ck2cs=h*(1+lambda1(j+1)-(ck1cs/2)*(s/(rho*e*(v(i)))));
ck2cp=h*(-(1+lambda1(j+1)-(ck1cs/2)*(-(1-ep)/e)*(-(kf*a)/v(i)
*(1-ep))-ka))+lambda2(j+1)-(ck1cp/2)*(((kf*a)/v(i)*(1-ep))-ka)+
(lambda3(j+1)-(ck1cl/2)*ka));
ck2cl=h*((lambda1(j+1)-(ck1cs/2)*(-(1-ep)/e)*kd))+lambda2(j+1)-
(ck1cp/2)*kd-lambda3(j+1)-(ck1cl/2)*kd);

ck3cs=h*(1+lambda1(j+1)-(ck2cs/2)*(s/(rho*e*(v(i)))));
ck3cp=h*(-(1+lambda1(j+1)-(ck2cs/2)*(-(1-ep)/e)*(-(kf*a)/v(i)*
(1-ep))-ka))+lambda2(j+1)-(ck2cp/2)*(((kf*a)/v(i)*(1-ep))-ka)+
lambda3(j+1)-(ck2cl/2)*ka);
ck3cl=h*((lambda1(j+1)-(ck2cs/2)*(-(1-ep)/e)*kd))+lambda2(j+1)-
(ck2cp/2)*kd-lambda3(j+1)-(ck2cl/2)*kd);

ck4cs=h*(1+lambda1(j+1)-ck3cs*(s/(rho*e*(v(i)))));
ck4cp=h*(-(1+lambda1(j+1)-ck3cs*(-(1-ep)/e)*(-(kf*a)/v(i)*(1-ep))-
ka))+lambda2(j+1)-ck3cp*(((kf*a)/v(i)*(1-ep))-ka)+lambda3(j+1)-
ck3cl*ka);
ck4cl=h*((lambda1(j+1)-ck3cs*(-(1-ep)/e)*kd))+lambda2(j+1)-ck3cp*
kd-lambda3(j+1)-ck3cl*kd);

lambda1(j)=lambda1(j+1)-(ck1cs+2*ck2cs+2*ck3cs+ck4cs)/6;
lambda2(j)=lambda2(j+1)-(ck1cp+2*ck2cp+2*ck3cp+ck4cp)/6;

```

```

lambda3(j)=lambda3(j+1)-(ck1c1+2*ck2c1+2*ck3c1+ck4c1)/6;

end

vk=((lambda1*((-(kf*a*(cp1(j+1)-csat)/(((v(i))^2)*e)))+(s*cs1(j+1))/(rho*e*(v(i))^2)))+lambda2*(kf*a*((cp1(j+1)-csat)/(v(i))^2*(1-ep))))/Q)^{-1/3};

vsb=min(0.00009,max(0,vk));

v=0.5*(vsb+oldv);

err1=sum(abs(oldv-v));
err1;

t=(cs1(i)+cp1(i))-((Q*(v.^2)/2));

J=sum(t.*h);
end

```

```

clc;
clear all;

cs0=0.5;
cp0=0.3;
cl0=0.1;
Q=1;
v0=0.00009;
% cs0=input('Konsentrasi lipid dalam aliran pelarut cs0= ');
% cp0=input('Konsentrasi lipid dalam aliran mikroalga cp0= ');
% cl0=input('Konsentrasi lipid dipermukaan partikel cl0= ');
% Q=input('bobot Q (Q)= ');

s=0.00005;
rho=74.79195;
e=0.3;
ep=0.3;
kf=1.72737;
a=0.000000000012256;
ka=0.000002;
kd=0.000001;
csat=9.25;

%plot gambar
t0=0; tf=1800; n=250;
[v,cs,cp,cl,cs1,cp1,cl1,lambda1,lambda2,lambda3,J]=nyicil_TA(Q,s,
rho,e,v0,ep,kf,a,ka,kd,cs0,cp0,cl0,csat,tf,t0,n)

t=linspace(0,tf,n+1);

figure(1)
plot(t,cs,'g',t,cs1,'r','linewidth',2);
legend('without Control','with Control');
grid;
xlabel('Time (t)');
ylabel('Lipid concentration of the solvent flow (Cs)');
hold on

figure(2)
plot(t,cp,'g',t,cp1,'r','linewidth',2);
legend('without Control','with Control');
grid;
xlabel('Time (t)');
ylabel('Lipid concentration in microalgae particles (Cp)');
hold on

```

```
figure(3)
plot(t,cl,'g',t,cl1,'r','linewidth',2);
legend('without Control','with Control');
grid;
xlabel('Time (t)');
ylabel('Concentration on the surface lipid solvents (Cl)');
hold on
```

## Lampiran B

**Lampiran 2** *Source code* Simulasi Model Ekstraksi Lipid Mikroalga dengan Metode LQR.

```
clc;
clear all;

ka=0.000002;
kd=0.000001;
kf=1.72737;
a=1.256*10^-11;
csat=9.25;
v=9*10^-5;
e=0.3;
ep=0.3;
s=5*10^-5;
rho=74.79195;
cs0=0.5;
cp0=0.3;
cl0=0.1;

A11=-s/rho*e*v;
A12=((1-ep)/e)*((kf*a/v*(1-ep))+ka);
A13=-((1-ep)/e)*kd;

A21=0;
A22=-((kf*a/v*(1-ep))+ka);
A23=kd;

A31=0;
A32=ka;
A33=-kd;

A=[A11 A12 A13 ; A21 A22 A23 ; A31 A32 A33];
clc;
% Uji keteramatan
C=[1 0 0;0 1 0;0 0 1];
CA=C*A;
A2=A^2;
CA2=C*A2;

Mp=[C;CA;CA2];
Z=rank(Mp)

%Uji keterkontrolan
```

```

B13=0;
B12=(kf*a)/(v^2)*(1-ep);
B11=-(-(1-ep)/e)*B12+(s/rho*e*v^2);

B= [B11;B12;B13];
%gain KC
Qc = [0.001 0 0;0 0.001 0;0 0 0.001]
Rc = [1]
Pc=are(A,B*inv(Rc)*B',C'*Qc*C)

Kc=inv(Rc)*B'*Pc

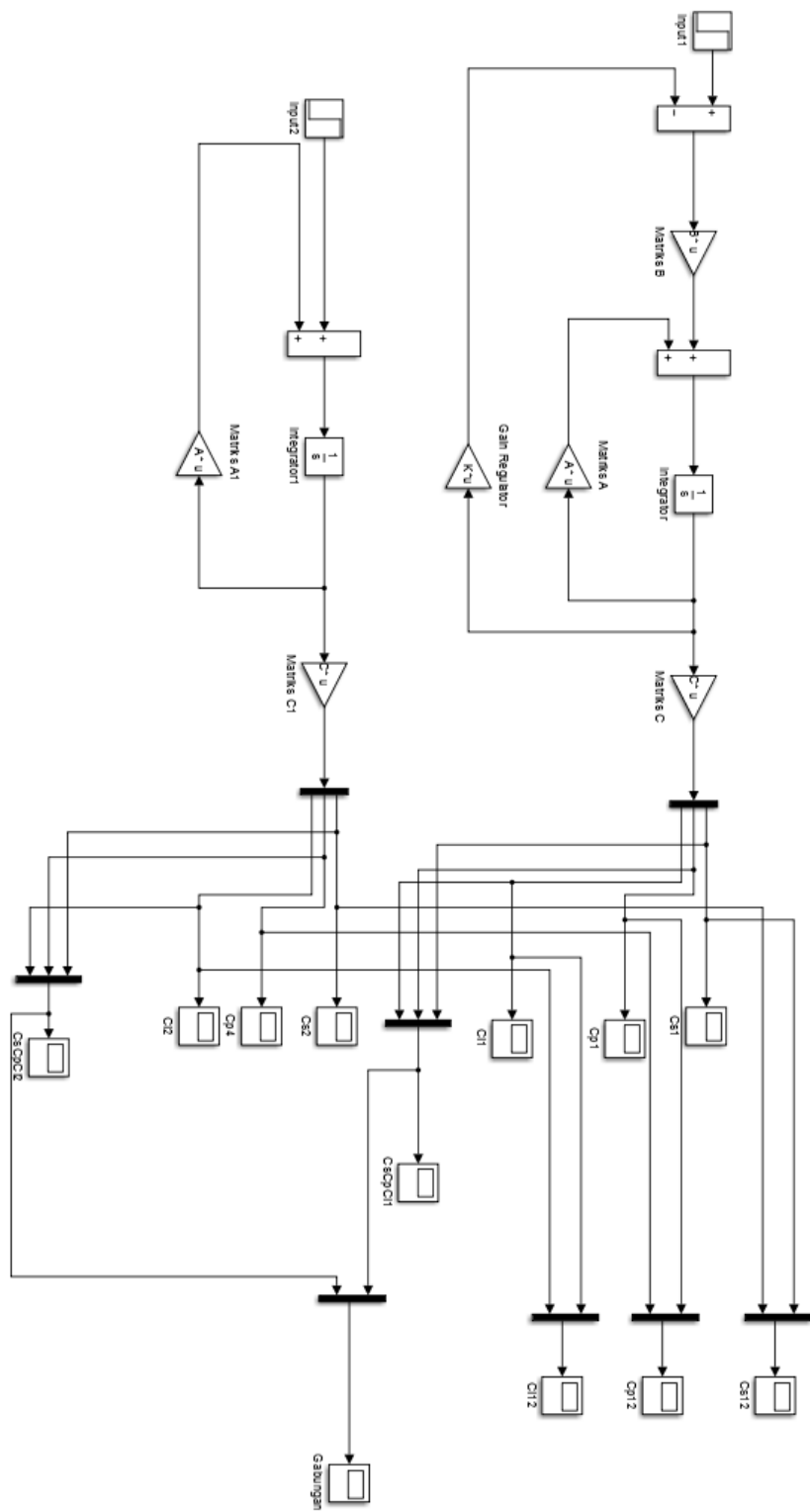
AB=A*B;
A2B=A^2*B;

Mc=[B AB A2B];
R=rank(Mc)

ssh=get(0,'ShowHiddenHandles');
set(0,'ShowHiddenHandles','On')
set(gcf,'menubar','figure')
set(gcf,'CloseRequestFcn','closereq')
set(gcf,'DefaultLineClipping','Off')
set(0,'ShowHiddenHandles',ssh)

```





## BIODATA PENULIS



Penulis bernama Nur Ilmayasinta, biasa dipanggil Maya. Penulis dilahirkan di Gresik, 03 Desember 1994. Penulis merupakan putri dari pasangan Iskandar dan Aminah Ulfah. Penulis menempuh pendidikan formal dimulai dari RAM 202 (1999-2000), MI Assa'adah Sukowati (2000-2006), MTs Ma'arif NU Assa'adah II Sampurnan Bungah (2006-2009), dan MA Ma'arif NU Assa'adah Sampurnan Bungah (2009-2012). Kemudian penulis melanjutkan studi ke jenjang S1 di Jurusan Matematika ITS Surabaya pada tahun 2012 dengan NRP 1212 100 703. Penulis lulus S1 pada tahun 2016, periode wisuda 114. Setelah lulus S1, penulis memutuskan untuk melanjutkan study S2, dengan harapan semoga ilmu yang didapatkan dapat bermanfaat bagi sesama dan semoga penelitian ini bisa bermanfaat bagi pembaca dan peneliti selanjutnya. Informasi lebih lanjut mengenai Tugas Akhir ini dapat ditujukan ke penulis melalui email: *ilmayasinta@gmail.com*